1ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE CÁLCULO III

Funções de Várias Variáveis.

1. Encontre uma função de várias variáveis que nos dê:
a) O volume de água necessário para encher uma piscina redonda de x metros de raio e y metros de altura.
b) A quantidade de rodapé, em metros, necessária para se colocar numa sala retangular de largura a e comprimento b.
c) A quantidade, em metros quadrados, de papel de parede necessária para revestir as paredes laterais de um quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento, se a altura do quarto é z metros.

2. Uma loja vende um certo produto P de duas marcas distintas, A e B. A demanda do produto com marca A depende do seu preço e do preço da marca competitiva B. A demanda do produto com marca A é $D_A = 1300 - 50x + 20y$ unidades/mês, e do produto com marca B é $D_B = 1700 + 12x - 20y$ unidades/mês, onde x é o preço do produto A e y é o preço do produto B. Escrever uma função que expresse a receita total mensal da loja, obtida com a venda do produto P.

3. Seja f uma função de duas variáveis dada por: $f(x, y) = \frac{(x+y)}{(x-y)}$. Encontre:
a) $f(-3, 4)$
b) $f(a^2; b^2)$
c) $[f(a, b)]^2$
d) $f(-a, b) - f(a, -b)$
e) $f(x + \Delta x, y)$
f) O domínio de f e represente graficamente.
g) A imagem de f.

4. Descreva e represente graficamente o domínio das seguintes funções.
a) $z = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$
b) $f(x, y) = \frac{x}{|y|}$
c) $z = 3 - x - y$
d) $w = e^{(x^2+y^2+z^2)}$
e) $w = \frac{1}{x^2+y^2}$
f) $z = \ln(x + y - 3)$
g) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$
h) $f(x, y) = \begin{cases} 2, se\ x \neq y \\ 0, se\ x = y \end{cases}$
i) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$
j) $z = \ln(4 - \sqrt{x^2 + y^2})$

k) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$
l) $y = \sqrt{\frac{(1+x)}{(1+z)}}$
m) $z = \sqrt{x+y-4}$
n) $z = \sqrt{y-1-x^2}$
o) $f(x,y) = \frac{5ln(x+y)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$
p) $f(x,y) = \sqrt{2y-x^2-y^2}$

5. A partir da equação dada, definir duas funções de duas variáveis, determinando seu domínio.
a) $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$
b) $l^2 = m^2 + n^2$

6. Desenhe as curvas de nível C_k para os valores de k dados.
a) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}; k = 0, 2, 3$
b) $z = x^2 - y^2; k = -2, -1, 0, 1, 2$
c) $f(x,y) = 2 - (x^2 + y^2); k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$
d) $f(x,y) = 2x^2 + 4y^2; k = 2, 3, 4, 8$
e) $f(x,y) = \sqrt{x+y}; k = 5, 4, 3, 2$
f) $g(x,y) = sen(x-y); k = 0$
g) $z = y^2 - x^2; k = -2, -1, 0, 1, 2$

7. O conjunto $S = \{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 16\}$ representa uma chapa plana e $T(x,y) = x^2 + y^2$ é a temperatura nos pontos da chapa. Determine as isotermas, representando-as graficamente.

8. Esboçar os gráficos das funções dadas.
a) $z = 2x^2 + 2y^2$
b) $z = -2x^2 - 2y^2$
c) $f(x,y) = 3$
d) $z = 4 - x^2$
e) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$
f) $f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$
g) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
h) $f(x,y) = \begin{cases} 2, se\ x \neq 0 \\ 0, se\ x = 0 \end{cases}$
i) $z = 3 - 2x - 3y$
j) $g(l,m) = 4 - m^2 - n^2$
k) $f(m,n) = m^2$, $0 \leq n \leq 8$

l) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
m) $z = x^2 + y^2 - 2$
n) $z = 8 - x^2 - y^2$
o) $f(x, y) = x + y + 4$
p) $z = 2x^2 + 3y^2$
q) $z = \sqrt{2x^2 + 3y^2}$

9. Sabendo que a função $T(x, y, z) = 30 - (x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2)$ representa a temperatura nos pontos da região do espaço delimitada pelo elipsóide $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, pergunta-se:
a) Em que ponto a temperatura é mais alta possível?
b) Se uma partícula se afasta da origem, deslocando-se sobre o eixo positivo dos x, sofrerá aumento ou diminuição da temperatura?
c) Em que pontos a temperatura é mais baixa possível?

10. Seja S a superfície definida por $f(x, y) = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$. Faça um esboço de S.

11. Considere a superfície $z = f(x, y)$ onde
$f(x, y) = \begin{cases} 8 - x^2 - y^2, se\ x^2 + y^2 \leq 4 \\ 4, se\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$ Pede-se:
a) As intersecções da superfície com os planos $z = 8$, $z = 6$, $z = 0$, $x = 0$ e $y = 0$.
b) Um esboço da superfície.

12. Seja $f(x, y) = \sqrt{10 - x - y^2}$
a) Represente o domínio de f no plano xy e determine a imagem de f.
b) Identifique as interseções do gráfico de f com os planos $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$, $y = 0$ e $x = 0$.
c) Faça um esboço do gráfico de f.