11. Problemas de Otimização

Nesta seção veremos vários exemplos de problemas cujas soluções exigem a determinação de valores máximos e/ou mínimos absolutos das funções que os representam. São chamados de problemas de otimização pelo fato de que as soluções encontradas com esta técnica são as melhores possíveis para cada caso, ou seja, resolver estes problemas com as técnicas de máximos e mínimos significa encontrar a solução ótima para eles.

Problema 1: Durante várias semanas, o departamento de trânsito de uma certa cidade vem registrando a velocidade dos veículos que passam por um certo cruzamento. Os resultados mostram que entre 13 e 18 horas, a velocidade média neste cruzamento é dada aproximadamente por $v(t) = t^3 - 10{,}5\, t^2 + 30\, t + 20$ km/h, onde t é o número de horas após o meio-dia. Qual o instante, entre 13 e 18 horas, em que o trânsito é mais rápido? E qual o instante em que ele é mais lento?

Solução:

O objetivo é determinar o máximo e o mínimo absoluto da função $v(t)$ no intervalo $1 \le t \le 6$. Para isso, inicialmente calculamos a primeira derivada e igualamos-na a zero para encontrar os pontos críticos:

$$v'(t) = 3t^2 - 21t + 30 = 0 \iff t = 2 \quad \text{ou} \quad t = 5.$$

Portanto, estes são os pontos críticos de v, ambos pertencentes ao intervalo (1,6).

Para verificar se são pontos de máximo ou mínimo locais, usamos o teste da segunda derivada:

$$v''(t) = 6t - 21 \Rightarrow v''(2) = -9 < 0 \Rightarrow t = 2 \text{ é ponto de máximo local de } v;$$

$$v''(5) = 9 > 0 \Rightarrow t = 5 \text{ é ponto de mínimo local de } v.$$

Para determinar os pontos de máximo e mínimo globais de v em [1,6], precisamos comparar os valores que v assume nos pontos críticos, com os respectivos valores nos extremos do intervalo, pois como v é uma função contínua definida em um intervalo fechado, pode assumir seus valores máximo e mínimo globais ou nos pontos críticos, ou nos extremos do intervalo. Assim, temos:

$$v(1) = 40{,}5 \qquad v(2) = 46 \qquad v(5) = 32{,}5 \qquad v(6) = 38.$$

Com isso concluímos que $t = 2$ é ponto de máximo global e $t = 5$ é ponto de mínimo global de v no intervalo de interesse [1,6]. Isso significa que o trânsito é mais rápido às 14h, quando os carros passam pelo cruzamento a uma velocidade média de 46 km/h e o trânsito é mais lento as 17h, quando os carros passam pelo cruzamento a uma velocidade média de 32,5 km/h.

Problema 2: Quando uma pessoa tosse, o raio da traquéia diminui, afetando a velocidade do ar na traquéia. Se r_0 é o raio normal da traquéia, a relação entre a velocidade v do ar e o raio r da traquéia é dada por uma função da forma $v(r) = a\,r^2\,(r_0 - r)$, onde a é uma constante positiva. Determine o raio para o qual a velocidade do ar é máxima.

Solução:

O raio r da traquéia contraída não pode ser negativo, nem maior que o raio normal, r_0. Assim, o objetivo é encontrar o máximo absoluto de $v(r)$ no intervalo $[0, r_0]$:

$$v'(r) = 2\,a\,r\,(r_0 - r) + a\,r^2\,(-1) = a\,r\,(2\,r_0 - 3\,r)$$

$$v'(r) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0 \quad \text{ou} \quad r_2 = \frac{2}{3}r_0$$

Como $r_1 = 0$ é um extremo do domínio, usamos o teste da segunda derivada apenas em r_2:

$$v''(r) = 2\,a\,(r_0 - 3r) \Rightarrow v''\left(\frac{2}{3}r_0\right) = -2\,a\,r_0 < 0 \Rightarrow r_2 = \frac{2}{3}r_0 \text{ é ponto de máximo local.}$$

Analisando o valor de v no máximo local e nos extremos do intervalo, temos:

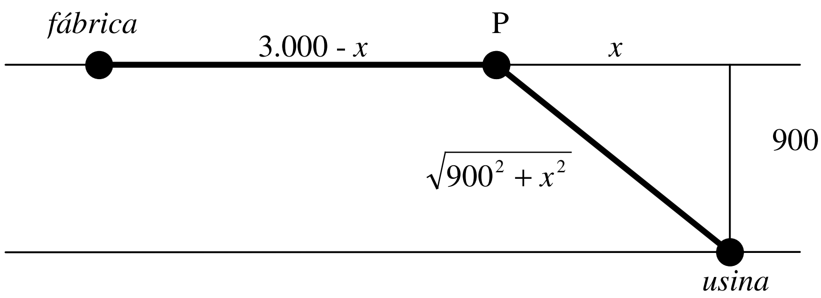
$$v(0) = 0, \quad v\left(\frac{2}{3}r_0\right) = \frac{4a}{27}r_0^3 \quad \text{e} \quad v(r_0) = 0.$$

Logo, o máximo global de v é atingido em $r_2 = \frac{2}{3}r_0$, o que significa que a velocidade do ar é máxima quando o raio da traquéia contraída é igual a 2/3 do seu raio normal.

Problema 3: Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de 900m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3.000m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R$ 5,00 o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa R$ 4,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?

Solução:

Inicialmente vejamos a ilustração gráfica do problema, a fim de facilitar a construção da função custo:



O objetivo é minimizar o custo de instalação do cabo. Logo, precisamos construir a função custo, a qual, baseada na figura acima, é dada por:

$$C(x) = 5\sqrt{900^2 + x^2} + 4(3.000 - x)\,.$$

Como x e $3.000 - x$ não podem ser negativos, a região de interesse (domínio do problema) é o intervalo [0, 3.000], onde devemos encontrar o mínimo absoluto de C. Para isso, iniciamos derivando C para encontrar seus pontos críticos:

$C'(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{900^2 + x^2}} - 4$. Logo,

$$C'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5x}{\sqrt{900^2 + x^2}} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{900^2 + x^2} = \frac{5x}{4}\,.$$

Como o radicando e x são positivos, elevando os dois lados da equação ao quadrado, obtemos:

$$900^2 + x^2 = \frac{25x^2}{16} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{16 \times 900^2}{9} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.200\,.$$

Como x deve ser positivo e $1.200 \in [0, 3.000]$, segue que é o único ponto crítico de C, no domínio de interesse. Vejamos se é ponto de mínimo relativo:

$C''(x) = \dfrac{5 \times 900^2}{\left(900^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$ para todo x. Logo o ponto crítico $x = 1.200$ é ponto de mínimo relativo de C. Para saber se é mínimo absoluto precisamos comparar o valor de C neste ponto com os valores nos extremos do domínio. Assim, temos:

$C(0) = 16.500{,}00$, $\quad C(1.200) = 14.700{,}00$ e $\quad C(3.000) = 15.660{,}00$.

Concluímos, portanto, que o custo mínimo para a instalação do cabo será de R$ 14.700,00 e, para obtê-lo, o cabo deverá percorrer 1.800 metros por terra, a partir da fábrica, e depois ir por água até a usina.

Problema 4: O *modelo Count* é uma fórmula empírica usada para predizer a altura de uma criança em idade pré-escolar. Se $h(x)$ denota a altura (em centímetros) na idade x (em anos) para $\frac{1}{4} \leq x \leq 6$, então h(x) pode ser aproximada por $h(x) = 70{,}228 + 5{,}104x + 9{,}222 \ln x$.

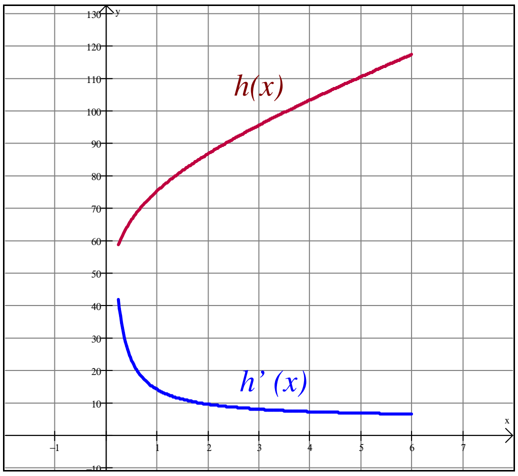
a) Construa o gráfico da função e da sua derivada.

b) Estime a altura e a taxa de crescimento quando uma criança atinge a idade 2 anos.

c) Quando a taxa de crescimento é máxima e mínima? Quanto valem estas taxas?

Solução:

a)



b) h (2) = 86,83, ou seja, quando uma criança atinge 2 anos, mede aproximadamente 87 cm. A taxa de crescimento é dada pela derivada de h, a qual é $h'(x) = 5{,}104 + \frac{9{,}222}{x}$. Assim, quando $x = 2$, temos $h'(2) = 9{,}715$, ou seja, aos dois anos uma criança cresce cerca de 9,7 cm/ano.

c) Pelo gráfico observamos que a taxa de crescimento é decrescente no intervalo considerado, o que pode ser confirmado pela derivada de $h'(x)$, dada por $h''(x) = \frac{-9{,}222}{x^2} < 0$, para todo x. Assim, a taxa de crescimento será máxima no menor valor de x, ou seja, em $x = 1/4$ e será mínima, no maior valor de x, ou em $x = 6$. O valor máximo da taxa de crescimento é, portanto, $h'(1/4) = 41{,}99$ cm/ano e o valor mínimo, $h'(6) = 6{,}64$ cm/ano.

EXERCÍCIOS:

1) Encontre as dimensões de um cilindro circular reto, de área total igual a 50 cm^2, de modo que o volume seja máximo.

2) Cinqüenta animais ameaçados de extinção são colocados em uma reserva. Decorridos t anos, a população x desses animais é estimada por: $x(t) = 50\dfrac{t^2 + 6t + 30}{t^2 + 30}$. Em que instante essa população animal atinge seu máximo? Quanto ele vale?

3) O peso específico da água a uma temperatura de T °C é dado por $P(T) = 1 + aT + bT^2 + cT^3$, $0 \leq T \leq 100$, sendo $a = 5{,}3\times10^{-5}$, $b = 6{,}53\times10^{-6}$ e $c = 1{,}4\times10^{-8}$. Qual é a temperatura na qual a água apresentará o maior peso específico? Construa o gráfico.

4) Um recipiente cilíndrico, aberto em cima, deve ter a capacidade de 375π cm^3. O custo do material usado para a base do recipiente é de R$ 0,15 por cm^2 e o custo do material usado na lateral é de R$ 0,05 por cm^2. Se não há perda de material, determine as dimensões que minimizam o custo do material para construí-lo.

5) Uma estação de rádio fez um levantamento dos hábitos dos ouvintes entre 17h e meia-noite. A pesquisa mostra que a porcentagem de adultos sintonizados na estação x horas após as 17h é

$$f(x) = \frac{1}{8}\left(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240\right).$$

a) Em que instante, entre 17h e meia-noite, existem mais ouvintes sintonizados na estação? Qual é a porcentagem de ouvintes neste momento?

b) Em que instante, entre 17h e meia-noite, existem menos ouvintes sintonizados na estação? Qual é a porcentagem de ouvintes neste momento?

6) De acordo com a lei de Poiseuille, a velocidade do sangue a r cm de distância do eixo central de uma artéria de raio R é dada por $S(r) = c\ (R^2 - r^2)$, onde c é uma constante positiva. A que distância do eixo central da artéria a velocidade do sangue é máxima?

7) Uma pesquisa de opinião revela que x meses após anunciar sua candidatura, certo político terá o apoio de $S(x) = \frac{1}{29}\left(-x^3 + 6x^2 + 63x + 1080\right)\%$ dos eleitores, sendo $0 \leq x \leq 12$. Se a eleição estiver marcada para novembro, qual o melhor mês para anunciar a candidatura? Se o político necessita de pelo menos 50% dos votos para vencer, quais são as chances de ser eleito?

8) A reação do organismo à administração de um medicamento é freqüentemente representada por uma função da forma $R(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right)$, onde D é a dose e C (uma constante) é a dose máxima que pode ser administrada. A taxa de variação de R em relação à D é chamada de sensibilidade. Determine o valor de D para o qual a sensibilidade é máxima.

9) Quando um resistor de R ohms é ligado aos terminais de uma bateria com uma força eletromotriz de E volts e uma resistência interna de r ohms, uma corrente de I ampères atravessa o circuito e dissipa uma potência de P watts, sendo

$$I = \frac{E}{r+R} \qquad \text{e} \qquad P = I^2R\,.$$

Supondo que r seja constante, qual o valor de R para o qual a potência dissipada é máxima?

10) Um departamento de estradas de rodagem está planejando fazer uma área de descanso para motoristas, à beira de uma rodovia movimentada. O terreno deve ser retangular, com uma área de 5.000 m^2 e deve ser cercado nos três lados que não dão para a rodovia. Qual o menor comprimento da cerca necessária para a obra?

11) Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento situada à margem de um rio de 500 m de largura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2.000 a oeste da central. O custo da obra através do rio é de R$ 640,00 por metro, enquanto que em terra custa R$ 312,00 por metro. Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável?

12) A rapidez com que um boato se espalha em uma comunidade é proporcional ao produto do número de pessoas que já ouviram o boato pelo número de pessoas que ainda não o ouviram. Mostre que a rapidez é máxima no instante em que metade das pessoas ainda não ouviu o boato.