# 1. Breve Revisão de Operações em ℝ

Esta seção contém um breve resumo de algumas operações e propriedades dos números reais, as quais serão muito utilizadas no desenvolvimento do Cálculo. Como se trata de uma rápida revisão, escolhemos aquelas propriedades que são essenciais, porém muitas vezes acabam esquecidas pelos estudantes. Dessa forma, muitas outras foram omitidas, o que não significa que não serão necessárias.

Para o bom acompanhamento de um curso de Cálculo é necessário que todas as regras básicas das operações com os números reais estejam presentes em sua memória, o tempo todo. Por isso recomendamos não apenas o estudo desta revisão, como também a constante busca pelos conteúdos já vistos e esquecidos. Para a elaboração desta seção utilizamos como referência o livro Pré-Cálculo, que acompanha o livro Cálculo Diferencial e Integral, de Paulo Boulos – Ed. Makron *Books*. Uma boa referência para um estudo mais detalhado é a coleção Fundamentos de Matemática Elementar, da Ed. Atual, com Gelson Iesi como autor predominante. Todavia, este é um assunto que já foi estudado ao longo do Ensino Fundamental e Médio e, portanto, seu livro didático também poderá te auxiliar nesta tarefa.

## 1.1 Simbologia

- $\mathbb{N}$ : conjunto dos números naturais. $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6, ...\}$
- $\mathbb{Z}$ : conjunto dos números inteiros. $\mathbb{Z} = \{ ... -5, -4, -3, -2, -1, 0,1,2,3,4,5,6, ...\}$
- $\mathbb{Q}$ : conjunto dos números racionais. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \text{ } tal \text{ } que \text{ } p, q \in \mathrm{Z};\, q \neq 0\right\}$. É o conjunto dos inteiros ou decimais com número finito de casas e daqueles com infinitas casas decimais, porém neste caso, seus elementos são iguais ou formam dízimas periódicas.
- $\mathbb{I}$ : conjunto dos números irracionais. São decimais com infinitas casas, cujos elementos aparecem aleatoriamente, ou seja, sem estabelecer nenhuma seqüência. Exemplo, $\pi$=3,14159265358979323846264338327 95...,

  $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097...$
- $\mathbb{R}$ : conjunto dos números reais. $\mathrm{R} = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$
- $\mathbb{R}^*$ : conjunto dos números reais, sem o zero

- $A \times B = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$ (produto cartesiano)
- $\mathbb{R}^2 = \mathrm{R} \times \mathrm{R} = \{(x, y) : x \in R,\ y \in R\}$
- $R^n = \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \cdots \times \mathrm{R}$ , $n$ vezes.
- $\forall$ : qualquer que seja
- : / ou tq : tal que
- $\in$ : pertence (elemento pertence a conjunto: $(x, y) \in R^2$ )
- $\notin$ : não pertence
- $\subset$ : está contido (sub-conjunto está contido em conjunto: $N \subset Z \subset Q \subset R$ )
- $\supset$ : contém
- $\cup$ : união; $\cap$ : intersecção
- $\approx$ : é equivalente a
- $\exists$ : existe;
- $\therefore$ : portanto
- $<$ : menor que; $>$ : maior que
- $\leq$ : menor ou igual a; $\geq$ : maior ou igual a
- $\Rightarrow$ : se, então ( $x \in N \Rightarrow x \in Z$ ; lê-se: se $x$ pertence ao conjunto dos naturais, então $x$ pertence ao conjunto dos inteiros; só vale a ida)
- $\Leftrightarrow$ : se, e somente se ( $x + y = z \Leftrightarrow x = z - y$ ; lê-se: $x$ mais $y$ é igual a $z$ se, e somente se, $x$ é igual a $z$ menos $y$; o entendimento que se tem é: se $x$ mais $y$ é igual a $z$, então $x$ é igual a $z$ menos $y$ e, concomitantemente, se $x$ é igual a $z$ menos $y$, então $x$ mais $y$ é igual a $z$; vale a ida e a volta)
- Intervalos:
  - Aberto: $(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$
  - Fechado: $[a,b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$
  - Semi-aberto à direita: $[a,b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$
  - Semi-aberto à esquerda: $(a,b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$
  - Infinito: $(-\infty,+\infty) = \{x \in R : -\infty < x < +\infty\} = R$

## 1.2 Operações e propriedades

Em matemática, um conjunto é caracterizado por seus elementos e pelas operações que estes podem realizar. E estas operações sempre satisfazem algumas propriedades, as quais são fundamentais para a realização dos cálculos necessários à solução de problemas. Os elementos de $\mathbb{R}$ já foram apresentados acima e neste conjunto estão definidas duas operações, **adição** e **multiplicação**, as quais satisfazem as seguintes propriedades:

(*I*) *Comutativa*: quaisquer que sejam dois números reais $a$ e $b$, sempre se tem:

$$a + b = b + a \qquad \text{e} \qquad ab = ba$$

(*II*) *Associativa*: quaisquer que sejam os números reais $a$, $b$ e $c$, sempre se tem:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \text{e} \qquad a(bc) = (ab)c$$

(*III*) *Elemento neutro*: existem únicos números reais, indicados por 0 e 1, tais que, para qualquer número real $a$, verificam

$$a + 0 = a \qquad \text{e} \qquad a\,.1 = a$$

(*IV*) *Elemento oposto e elemento inverso*:

(i) Dado um número real $a$, existe um único número real, indicado por $-a$, chamado **oposto** de $a$, tal que $a + (-a) = 0$.

(ii) Dado um número real $a \neq 0$, existe um único número real indicado por $\frac{1}{a}$ ou por $a^{-1}$, chamado **inverso multiplicativo** de $a$, tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

(*V*) *Distributiva*: quaisquer que sejam $a$, $b$ e $c$ reais, sempre se tem:

$$a\,(b + c) = ab + ac \qquad \text{e} \qquad (b + c)\,a = ba + ca$$

### Conseqüências das regras básicas:

**1. *Subtração*:** a diferença entre $b$ e $a$, indicada por $b - a$, é definida por $b - a = b + (-a)$.

Conseqüentemente, para todo $a$, $b$ reais, tem-se:

$$-(a+b) = -a-b\,, \qquad a(b-c) = ab-ac \qquad \text{e} \qquad (b-c)a = ab-ca$$

**2. *Potenciação*:** sendo $a$ um número real, definimos:

$$a^1 = a$$

$a^n = a.a.a....a$ ($n$ fatores), se $n = 2, 3, 4, ...$

Se $a \neq 0$, podemos estender esta definição para $n$ inteiro e assim,

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \; n = 1,2,3,4,...$$

**Regras da potenciação:** sendo $a$ e $b$ números reais não nulos, $m$ e $n$ inteiros, tem-se:

- $a^{m+n} = a^m \, a^n$
- $(ab)^n = a^n \, b^n$
- $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$
- $(a^m)^n = a^{m\,n}$

**3.** ***Divisão*****:** o **quociente** de $b$ por $a$, onde $a \neq 0$, indicado por $\dfrac{b}{a}$, é definido por $\dfrac{b}{a} = b \cdot \dfrac{1}{a}$, onde $b$ é referido como numerador e $a$, denominador. $\dfrac{b}{a}$ também é referido como **fração**.

**Regras da divisão:** sejam $a$, $b$, $c$, $d$ diferentes de zero. Então,

- É PROIBIDO DIVIDIR POR ZERO !!!!!
- $\dfrac{a}{a} = 1$
- $\dfrac{-b}{a} = \dfrac{b}{-a} = -\dfrac{b}{a}$, $\qquad \dfrac{-b}{-a} = \dfrac{b}{a}$
- $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = a \cdot \dfrac{1}{c} + b \cdot \dfrac{1}{c} = (a+b) \cdot \dfrac{1}{c} = \dfrac{a+b}{c}$
- $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{a}{c}\dfrac{d}{d} + \dfrac{b}{d}\dfrac{c}{c} = \dfrac{ad}{cd} + \dfrac{bc}{cd} = \dfrac{ad+bc}{cd}$. Se $c$ e $d$ não são primos entre si, tomamos o mmc($c$,$d$) como denominador para obtermos o quociente já na forma simplificada.
- $\dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{b}{d} = \dfrac{ab}{cd}$
- $\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{d}{b}$

***Observação*:** Uma pergunta surge com muita freqüência: Por que $a^0 = 1$?

*Resposta*: Para que todas as propriedades de potenciação continuem válidas. Veja, para todo $n$ inteiro positivo, nós podemos escrever $a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$. Se $a^0$ tivesse sido definido por qualquer outro número diferente de 1, a expressão anterior não seria verdadeira.

## 1.3 Expressões Algébricas

É importante entender bem a diferença entre equação e identidade: Dada uma igualdade onde em cada membro se tem uma expressão em $x$, consideremos o conjunto de todos os números reais que são comuns aos domínios dessas expressões, ou seja, o conjunto dos números reais para os quais são possíveis de serem realizadas as operações indicadas por ambas as expressões. Indiquemos tal conjunto por $D$. Se a igualdade se verifica para todo $x$ de $D$, tem-se uma **identidade (em *D*)**. Caso contrário, tem-se uma **equação**. Neste último caso, resolver a equação significa encontrar todos os valores de $x$ que a verificam. O conjunto de todos estes valores é chamado **conjunto-solução**, o qual pode ser vazio, no caso da equação não possuir soluções.

***Exemplos*:**

a) Para a igualdade $2x - 1 = 4$, tem-se $D = \mathbb{R}$. Resolvendo-a, chega-se a $x = 5/2$. Logo, trata-se de uma equação, cujo conjunto-solução é {5/2}.

b) Para a igualdade $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$, tem-se $D = \mathbb{R}$. Como $(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + +3x + 9 = x^2 + 6x + 9$, trata-se de uma identidade em $\mathbb{R}$, ou seja, esta igualdade é verdadeira para todo $x$ real.

c) Para a igualdade $\frac{1}{x-2} = 4$, tem-se que $D = \mathbb{R}$ - {2}. Para resolvê-la, multiplicamos ambos os membros por ($x$ – 2) para obtermos $4(x-2) = 1$, o que é equivalente a $x$ = 9/4. Logo, trata-se de uma equação, cujo conjunto solução é {9/4}.

d) Você deve se lembrar das igualdades: $\cos^2 x + sen^2 x = 1$, $tg^2 x + 1 = \sec^2 x$ ou $sen(a+b) = sen(a)\cos(b) + sen(b)\cos(a)$. Pois tratam-se de identidades, uma vez que, tomando $x$, $a$ e $b$ em radianos, a fim de que pertençam ao conjunto dos reais, é possível provar que estas igualdades são verdadeiras em todo o domínio de validade do seno, cosseno, tangente e secante, ou seja, a primeira e a terceira igualdades se verificam para todo $x$, $a$ e $b$ reais e a segunda, em $\mathbb{R}$ - $\{\pi/2 + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. É por isso que são chamadas de **identidades trigonométricas**.

## 1.4 Expressões polinomiais

Informalmente falando, podemos dizer que uma expressão polinomial é a soma de parcelas do tipo $ax^n$, $a$ real e $n$ natural (se $n$ = 0, convenciona-se que $ax^n = a$). No caso de duas incógnitas é a mesma coisa, o tipo sendo $ax^n y^m$, $m$ natural. Os números que multiplicam as potências nas expressões e os que figuram isoladamente são chamados de coeficientes. Assim, -2, 3 e 7 são os coeficientes de $-2x^2+3x+7$, e assim por diante. Cada parcela da expressão polinomial é referida como *termo*. Assim, $-2x^2$, $3x$ e 7 são os termos de $-2x^2+3x+7$. O termo no qual não aparece $x$ é chamado de *termo independente* ou *termo constante*. Os termos de mesmo expoente, do tipo $ax^n$ e $bx^n$, são chamados *termos semelhantes*. Por exemplo, $4x^2$ e $-3x^2$ são termos semelhantes.

### Operações:

**Soma:** A soma de expressões polinomiais é feita somando todos os termos, podendo-se usar a propriedade distributiva para os termos semelhantes.

***Exemplo*:**

$$(5x^4-2x^2+x+4)+(x^3+8x^2-5x-1)=5x^4+x^3+(-2+8)x^2+(1-5)x+(4-1)=$$
$$5x^4+x^3+6x^2-4x+3$$

**Produto:** O produto de expressões polinomiais é feito termo a termo, respeitando-se as regras de potência e a propriedade distributiva.

***Exemplo*:**

$$(5x^4-2x^2+x+4)\,(x^3+8x^2-5x-1)=$$
$$5x^4(x^3+8x^2-5x-1)-2x^2(x^3+8x^2-5x-1)+x(x^3+8x^2-5x-1)+4(x^3+8x^2-5x-1)=$$
$$5x^7+40x^6-25x^5-5x^4-2x^5-16x^4+10x^3+2x^2+x^4+8x^3-5x^2-x+4x^3+32x^2-20x-4=$$
$$5x^7+40x^6-27x^5-20x^4+22x^3+29x^2-21x-4$$

***Produtos notáveis:*** alguns produtos são tão utilizados que acabam recebendo nomes e métodos especiais de resolução. Eis alguns deles:

$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2 \qquad (x-a)^2=x^2-2ax+a^2$$

$$(x+a)^3=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3 \qquad (x-a)^3=x^3-3x^2a+3xa^2-a^3$$

***Observações*:**

**1.** Os produtos notáveis são identidades, ou seja, as igualdades acima são verdadeiras para todo $x$ real.

**2.** A expressão $(x+a)^n, n>1$ é denominada **Binômio de Newton**, devido ao matemático que determinou uma fórmula para a sua expansão. Os casos exemplificados acima são casos particulares desta fórmula geral, a qual é dada por:

$$(x+a)^n=x^n+\frac{n}{1!}x^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}a^3+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2}{(n-1)!}xa^{n-1}+a^n \ ,$$

sendo que 1! = 1, 2! = 2.1, 3! = 3.2.1, $n$! = $n$. ($n$-1).($n$-2).($n$-3) ... 2.1

**3.** Muita atenção para o fato de que, em geral,

$$(x\pm a)^2 \neq x^2 \pm a^2$$
$$(x\pm a)^3 \neq x^3 \pm a^3$$
$$(x\pm a)^n \neq x^n \pm a^n, \quad n>1$$

Quando dizemos "em geral" queremos dizer podem existir alguns valores de $x$ ou de $a$ que tornem, por exemplo, a igualdade $(x+a)^2=x^2+a^2$ verdadeira. $a = 0$ é um caso.

**Quociente:** O teorema que fala sobre a divisão de inteiros positivos é o seguinte: Dados os inteiros positivos $a$ e $b$, existe um único par ordenado ($q$, $r$) de números inteiros tal que $a = bq + r$, com $0 \le r < b$. Neste contexto, $q$ e $r$ são chamados, respectivamente, **quociente** e **resto** da divisão euclidiana de $a$ por $b$, onde $a$ é o **dividendo** e $b$, o **divisor**. Assim, ao dividirmos, por exemplo, 50 por 13, obtemos o quociente igual a 3 e o resto igual a 11, ou seja, podemos escrever

50 = 3 . 13 + 11 ou equivalentemente, $\dfrac{50}{13}=3+\dfrac{11}{13}$.

Existe um teorema análogo que diz respeito à divisão de uma expressão polinomial por outra. Para enunciá-lo, introduzimos a seguinte nomenclatura:

Se na expressão polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ tem-se $a \neq 0$, ela é dita ter grau *n*.

Agora podemos formular o seguinte resultado:

Se *A* e *B* são expressões polinomiais, $B \neq 0$, existe um único par (*Q*, *R*) de expressões polinomiais tal que a identidade *A* = *BQ* + *R* se verifica, com *R* = 0 ou grau de *R* < grau de *B*.

Existe um algoritmo para efetuar a divisão de polinômios, análogo ao algoritmo utilizado para dividir números inteiros. O exemplo a seguir ilustra.

***Exemplo*****:** Para dividir $5x^3 - 3x + 4$ por $x^2 - x + 1$ podemos proceder de maneira análoga à divisão entre números inteiros. Podemos inclusive usar a mesma disposição prática do processo:

$$5x^3 + 0x^2 - 3x + 4 \left| \underline{x^2 - x + 1} \right.$$

a) Divida $5x^3$ (primeira parcela do dividendo) por $x^2$ (primeira parcela do divisor) para obter $5x$ (primeira parcela do quociente):

$$\begin{array}{r|l} 5x^3 + 0x^2 - 3x + 4 & \underline{x^2 - x + 1} \\ & \quad 5x \end{array}$$

b) Multiplique $5x$ pelo divisor, mudando o sinal, para obter $-5x^3 + 5x^2 - 5x$. Escreva isso abaixo do dividendo para somar com ele:

$$\begin{array}{r|l} 5x^3 + 0x^2 - 3x + 4 & \\ \underline{-5x^3 + 5x^2 - 5x + 0} & \underline{x^2 - x + 1} \\ 5x^2 - 8x + 4 & \quad 5x \end{array}$$

c) Repita o processo com $5x^2 - 8x + 4$ como dividendo:

$$\begin{array}{r|l} 5x^3 + 0x^2 - 3x + 4 & \\ \underline{-5x^3 + 5x^2 - 5x + 0} & \underline{x^2 - x + 1} \\ 5x^2 - 8x + 4 & \; 5x + 5 \\ \underline{-5x^2 + 5x - 5} & \\ -3x - 1 & \end{array}$$

Como a expressão $-3x - 1$ tem grau 1, menor que o grau 2 do divisor, devemos parar por aqui.

***Observação*****:** O processo de divisão acima nos permite escreve a seguinte identidade em $\mathbb{R}$:

$$5x^3 - 3x + 4 = (x^2 - x + 1)(5x + 5) - 3x - 1$$

ou equivalente

$$\frac{5x^3-3x+4}{x^2-x+1}=5x+5-\frac{3x+1}{x^2-x+1}$$

**Fatoração:** Fatorar um polinômio significa escreve-lo como um produto de outros polinômios, onde cada fator é um polinômio de grau inferior ao do polinômio fatorado. Existem vários tipos, porém só vamos tratar aqui o caso que mais nos interessa:

***Teorema Fundamental da Álgebra*:** Seja $P_n(x)$ um polinômio de grau *n*, com variável *x*. Então $P_n(x)$ pode ser escrito na forma

$$P_n(x)=c\ (x-a_1)^{m_1}\ (x-a_2)^{m_2}\ \cdots (x-a_n)^{m_n}$$

onde *c* é uma constante, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são as *n* raízes de $P_n(x)$ (reais ou complexas) e $m_i$ denota a multiplicidade da *i*-ésima raiz.

***Observações*:**

**(i)** Um número *a* é dito raiz de um polinômio em *x* se ao ser colocado no lugar de *x*, anula o polinômio.

**(ii)** Chamamos de multiplicidade de uma raiz o número de vezes que ela ocorre no mesmo polinômio. Se a multiplicidade for 1, chamamos a raiz de simples.

**(iii)** Um polinômio é dito irredutível quando só possui raízes simples. Se as raízes são admitidas apenas em $\mathbb{R}$, então o polinômio é dito irredutível quando só possui raízes simples ou não possui raízes reais.

**(iv)** O Teorema Fundamental da Álgebra nos diz que todo polinômio pode ser fatorado, bastando para isso, conhecer suas raízes.

***Exemplo*:** *x* = 1 é raiz do polinômio $p(x)=x^3-1$, pois substituindo *x* por 1 obtemos $p(1)=0$. Logo, *x* – 1 é um fator do polinômio $p(x)$, quando na forma fatorada, ou seja, $p(x)$ pode ser escrito na forma $p(x)=(x-1)\ q(x)$. Para determinarmos $q(x)$ basta dividirmos $p(x)$ por $(x-1)$ e obteremos $q(x)=(x^2+x+1)$. Logo, podemos escrever $p(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.

Neste exemplo observamos que $x = 1$ é uma raiz simples de $p(x) = x^3 - 1$ e que $q(x) = (x^2 + x + 1)$ é um polinômio irredutível em $\mathbb{R}$, pois não possui raízes reais. Portanto, se estamos trabalhando apenas no conjunto dos reais, a expressão fatorada de $p(x)$ é $(x-1)(x^2 + x + 1)$.

**Expressões racionais**

Como já foi visto, as operações com expressões algébricas seguem as mesmas regras das operações com números reais. Todavia, quando se trata de frações, um cuidado a mais sempre é necessário, pois muitos detalhes precisam ser observados:

- O denominador não pode ser zero. Portanto, ao efetuar um cálculo do tipo

$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{5x^4}{x^2+2x+1}$$

a primeira preocupação deve ser a determinação dos valores de $x$ que podem ser utilizados nas operações, ou seja, o domínio da expressão. Neste caso, temos $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ e $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Portanto, ao trabalhar com a expressão acima, devemos ter sempre em mente que estamos considerando $x \neq \pm 1$.

- A fatoração deve ser sempre utilizada para verificar a presença ou não de fatores comuns nos denominadores, o que facilitarão os cálculos. Observe que:

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \quad \text{e} \quad x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

Logo, existe um fator comum no denominador, que é $(x+1)$, e assim a operação acima torna-se:

$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{5x^4}{x^2+2x+1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{5x^4}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1) - 5x^4(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{-5x^5 + 5x^4 + 2x + 2}{(x-1)(x+1)^2}$$

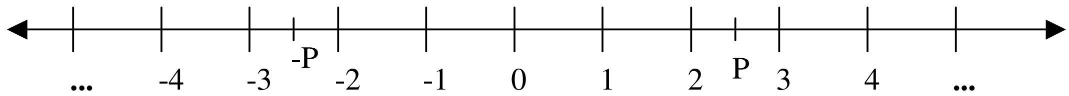
- Devido às propriedades de soma de frações, tem-se $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, para todo número real $a$, $b$, $c$ , $c \neq 0$. Porém, em geral, $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$. Veja, se isso fosse verdadeiro sempre, teríamos, por exemplo, $\frac{12}{4} = \frac{12}{3+1} = \frac{12}{3} + \frac{12}{1} = 4 + 12 = 16$ !!!! Absurdo !!!!

- $\frac{0}{a} = 0, \forall\, a \neq 0$ e $\frac{b}{a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Mas é muito comum erros do tipo: $\frac{2}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ou $\frac{2}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. A solução para a equação proposta é, naturalmente, o conjunto vazio, pois $2 \neq 0$.

## 1.5 Relações de Ordem

Até agora vimos propriedades dos números reais que envolvem igualdade. Para examinarmos as propriedades que envolvem desigualdades é interessante termos uma visão geométrica do conjunto dos números reais, o que facilitará a compreensão dos resultados. Convenciona-se representar o conjunto dos números reais por uma reta e sobre ela, escolhe-se um ponto para ser a origem. Neste ponto posiciona-se o número 0. À direita do 0 e em ordem crescente, encontram-se os números positivos e à esquerda, de modo simétrico, os números negativos.




Assim, dados dois números reais distintos *a* e *b*, se *a* está à esquerda de *b*, dizemos que *a* é menor que *b* e indicamos $a < b$, ou equivalentemente, dizemos que *b* é maior que *a* e indicamos $b > a$. Do ponto de vista algébrico, dizemos que $b > a$ se $b - a > 0$ e, analogamente, *a* é menor que *b* se $a - b < 0$.

Introduzimos a seguinte notação :

$a \geq b$ significa $a > b$ ou $a = b$.

$a \leq b$ significa $a < b$ ou $a = b$.

***Convenção*:** Se $x > a$ e $x < b$, costuma-se combinar isso escrevendo $a < x < b$. Significado análogo tem as expressões $a \leq x \leq b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$.

**Propriedades:** Se $a, b, c \in R$, então:

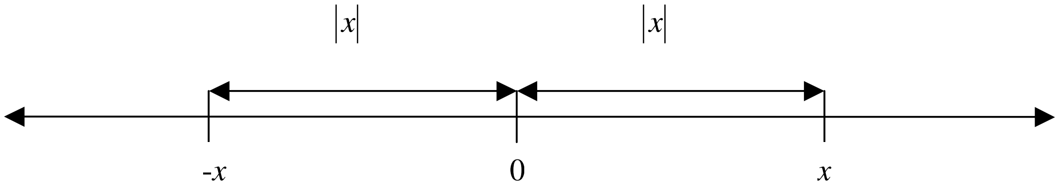
- $a \leq b \;\; e \;\; b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (transitividade)

- $\begin{cases} a \geq b \Rightarrow a+c \geq b+c \\ a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c \end{cases}$ (soma de valores iguais não altera a desigualdade)
- $\begin{cases} a \geq b \ e \ c > 0 \Rightarrow ac \geq bc \\ a \leq b \ e \ c > 0 \Rightarrow ac \leq bc \end{cases}$ (produto de valores positivos não altera a desigualdade)
- $\begin{cases} a \geq b \ e \ c < 0 \Rightarrow ac \leq bc \\ a \leq b \ e \ c < 0 \Rightarrow ac \geq bc \end{cases}$ (produto de valores negativos inverte a desigualdade)

## Módulo ou Valor Absoluto

*Definição*: Seja $x \in \mathbb{R}$. O módulo de *x* é dado por $|x| = \begin{cases} x, \ se \ x \geq 0 \\ -x, \ se \ x < 0 \end{cases}$

*Interpretação Geométrica:* distância de *x* até a origem.




*Propriedades:* $\forall \ a,b \in R$ , tem-se:

- $|a| \geq 0 \ e \ |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|ab| = |a||b| \ e \ se \ b \neq 0, \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
- $|-a| = |a|$
- $|a|^2 = a^2$
- $\begin{cases} |a+b| \leq |a| + |b| & (\textit{desigualdade triangular}) \\ |a+b| = |a| + |b| \ \Leftrightarrow \ ab \geq 0 \end{cases}$

***Exemplos*:** Nestes exemplos vamos exercitar um pouco do que vimos através da resolução de equações e inequações (com desigualdades), buscando encontrar o conjunto solução.

1) Resolva a equação $|x-2|=5$.

*Solução*: Da definição de módulo, tem-se:

$$|x-2| \quad = \quad \begin{cases} x-2, \ se \ x-2 \geq 0 \\ 2-x, \ se \ x-2<0 \end{cases} \quad = \quad \begin{cases} x-2, \ se \ x \geq 2 \\ 2-x, \ se \ x<2 \end{cases}.$$

Portanto a equação torna-se:

$$\begin{cases} x-2=5, \ se \ x \geq 2 \\ 2-x=5, \ se \ x<2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=7, \ se \ x \geq 2 \\ x=-3, \ se \ x<2 \end{cases}.$$

Assim, as soluções da equação são $x = 7$ e $x = -3$, ou $S = \{-3, 7\}$.

2) Resolva a equação $|x| = 2|-x|$.

*Solução*: Da definição de módulo, tem-se:

$$|x| = \begin{cases} x, \ se \ x \geq 0 \\ -x, \ se \ x<0 \end{cases} \quad \text{e} \quad |-x| = \begin{cases} -x, \ se \ -x \geq 0 \\ x, \ se \ -x<0 \end{cases} \quad = \quad \begin{cases} -x, \ se \ x \leq 0 \\ x, \ se \ x>0 \end{cases}.$$

Portanto a equação torna-se:

$$\begin{cases} x=2x, \ se \ x>0 \\ -x=-2x, \ se \ x<0 \\ 0=0, \ se \ x=0 \end{cases}$$ , cujo conjunto solução é $S = \{0\}$.

3) Resolva a inequação $|x| \leq a$ .

*Solução*: Utilizando a definição de módulo, a inequação torna-se:

$$\begin{cases} x \leq a, \ se \ x \geq 0 \\ -x \leq a, \ se \ x<0 \end{cases} \quad \approx \quad \begin{cases} x \leq a, \ se \ x \geq 0 \\ x \geq -a, \ se \ x<0 \end{cases}.$$

Assim, o conjunto-solução é $S = \{x \in R : -a \leq x \leq a\} = [-a, a]$.

4) Resolva a inequação $|x-1| < 2$.

*Solução*: Utilizando a definição de módulo, a inequação torna-se:

$$\begin{cases} x-1<2, \ se \ x \geq 1 \\ 1-x<2, \ se \ x<1 \end{cases} \quad \approx \quad \begin{cases} x<3, \ se \ x \geq 1 \\ x>-1, \ se \ x<1 \end{cases} \quad .$$

Assim, o conjunto-solução é $S = \{x \in R : -1 < x < 3\} = (-1, 3)$.

5) Resolva a inequação $|x-4| \geq 3$.

*Solução*: Utilizando a definição de módulo, a inequação torna-se:

$$\begin{cases} x-4 \geq 3, \ se \ x \geq 4 \\ 4-x \geq 3, \ se \ x < 4 \end{cases} \approx \begin{cases} x \geq 7, \ se \ x \geq 4 \\ -x \geq -1,, \ se \ x < 4 \end{cases} \approx \begin{cases} x \geq 7, \ se \ x \geq 4 \\ x \leq 1, \ se \ x < 4 \end{cases}.$$

Assim, o conjunto-solução é $S = \{x \in R : x \leq 1 \ ou \ x \geq 7\} = (-\infty, 1]) \cup [7, +\infty)$.

6) Resolva a inequação $\dfrac{x+1}{2-x} < \dfrac{x}{3+x}$.

*Solução*: $\dfrac{x+1}{2-x} < \dfrac{x}{3+x} \iff \dfrac{x+1}{2-x} - \dfrac{x}{3+x} < 0 \iff \dfrac{(x+1)(3+x) - x(2-x)}{(2-x)(3+x)} < 0 \iff$

$$\frac{4x + x^2 + 3 - 2x + x^2}{(2-x)(3+x)} < 0 \iff \frac{2x^2 + 2x + 3}{(2-x)(3+x)} < 0 \iff (2-x)(3+x) < 0,$$

já que $2x^2 + 2x + 3 > 0, \ \forall x \in R$. Porém,

$$(2-x)(3+x) < 0 \iff \begin{cases} (2-x) > 0 \ e \ (3+x) < 0 \quad ou \\ (2-x) < 0 \ e \ (3+x) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x > -2 \ e \ x < -3 \quad ou \\ -x < -2 \ e \ x > -3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x < 2 \ e \ x < -3 \quad ou \\ x > 2 \ e \ x > -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -3 \quad ou \\ x > 2 \end{cases}$$

Portanto, S = $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.

7) Resolva a inequação $|2x-6| > |x+4|$.

*Solução*: Neste caso, como os dois termos da desigualdade são positivos, elevando ambos ao quadrado, o sinal da desigualdade permanecerá e os cálculos serão simplificados. Assim teremos

$$|2x-6| > |x+4| \iff |2x-6|^2 > |x+4|^2 \iff (2x-6)^2 > (x+4)^2 \iff$$

$$4x^2 - 24x + 36 > x^2 + 8x + 16 \iff 3x^2 - 32x + 20 > 0 \iff x < \frac{2}{3} \quad ou \quad x > 10.$$

Portanto, $S = (-\infty, \dfrac{2}{3}) \cup (10, +\infty)$.

## Raiz n-ésima

Seja $b \geq 0$ um número real e $n > 1$ um inteiro par. Chama-se raiz n-ésima de $b$ ao número $a \geq 0$ tal que $a^n = b$. Indica-se $a = \sqrt[n]{b}$.

**Observações:**

**1.** Se $b > 0$, então existem dois números, a saber, $a_+ = \sqrt[n]{b}$ e $a_- = -\sqrt[n]{b}$, tais que $a^n = b$, porém a raiz n-ésima de $b$ é apenas $a_+$, pois é positiva por definição.

**2.** Se $b$ é um número real qualquer e n > 1 é um inteiro ímpar, então o único número $a$ tal que $a^n = b$ é chamado de raiz n-ésima de $b$. Indica-se $a = \sqrt[n]{b}$.

**Propriedades:**

Valem as seguintes propriedades para *n, p, m* inteiros, $n > 1$, $m > 1$:

$(i)$ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

$(ii)$ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$(iii)$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Caso particular: $p = 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$.

$(iv)$ $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

com a ressalva de que, se $n$ é par, então $a, b > 0$.

**Cuidado:** Em geral, $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ **.**

Veja: $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$. Porém, $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4+3 = 7$

$\sqrt[3]{8+1} = \sqrt[3]{9} = 2{,}080038...$ Porém, $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2+1 = 3$

**Observação:** Quando se pergunta quanto é $\sqrt{x^2}$, a resposta quase sempre é $x$, ou seja, escreve-se $\sqrt{x^2} = x$. Todavia, se tomarmos, por exemplo, $x$ = - 4, então teremos $\sqrt{(-4)^2} = -4$, o que evidentemente está errado, pois $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$. Qual seria então a resposta correta? Bem, segue da definição de raiz-quadrada que $\sqrt{x^2}$ é o único número **positivo** ou **nulo** que elevado ao quadrado dá $x^2$. Como $|x|^2 = x^2$ e $|x| \geq 0$, segue que $\sqrt{x^2} = |x|$.

**EXERCÍCIOS:**

**1)** Determine o conjunto solução das equações e inequações abaixo:

a) $|2x-4| = 6$

b) $|x| = -2$

c) $|3x+1| = |x-2|$

d) $(2x-1)^2 = 25$

e) $|5x-10| < 7$

f) $|x+8| \geq 1$

g) $|2-4x| > 3$

h) $(x+2)^2 = a^2$

**2)** Efetue os produtos:

a) $(x+1)\ (2x-1)\ (4x^2)$

b) $(3u-6v)\ (u^2-v^2)$

c) $(3x^2-4x+5)\ (x^2-6x+4)$

**3)** Resolva a equação $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 3^2$.

**4)** Divida (isto é, dê o quociente e o resto):

a) $4x^2-3x+6$ por $x+2$

b) $x^4+x^3+2x+15$ por $2x^2-6x+4$

**5)** Fatore:

a) $x^2+4x+3$

b) $x^2-3x+2$

c) $25x^2-4$

d) $8x^3-27$

e) $x^3-7x+6$

f) $2x^3-4x+2$

**6)** Efetue e/ou simplifique:

a) $\dfrac{3x+1}{x+1}+\dfrac{x^2}{x+1}$

b) $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{2x-1}{2x+1}$

c) $\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x}$

d) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{x^2}{x^2-9}$

e) $x-1+\dfrac{1}{x-1}$

f) $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}-\dfrac{x-3}{x+3}$

g) $x\left(3x^4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^3}+\sqrt{x}\right)$

h) $\dfrac{\sqrt{x^4+4x^2}}{x}$

**7)** Verdadeiro ou falso? Justifique ou dê contra-exemplo.

a) $|a|$ é sempre positivo

b) $\sqrt{9}=\pm 3$

c) $|a|$ pode ser nulo

d) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b},\ \forall\ a,b\in R$

e) $|a+b|=|a|+|b|,\ \forall a,b\in R$

f) $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{3}{2}}$

g) $|ab|<|a||b|$

h) $\left(\sqrt{x}\right)^2=x,\ x\geq 0$

i) $\dfrac{1}{(x-a)^2}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{a^2}$

j) $x-2=\sqrt[3]{x^3-8}$

k) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{2x+1}{x+1}$

l) $(-x)^2=-x^2$