12 Integral Indefinida

Em muitos problemas, a derivada de uma função é conhecida e o objetivo é encontrar a própria função. Por exemplo, se a taxa de crescimento de uma determinada população é conhecida, pode-se desejar saber qual o tamanho da população em algum instante futuro; conhecendo a velocidade de um corpo em movimento, pode-se querer calcular a sua posição em um momento qualquer; conhecendo o índice de inflação, deseja-se estimar os preços, e assim por diante.

O processo de obter uma função a partir de sua derivada é chamado de **antiderivação** ou **integração indefinida**.

***Primitiva ou Antiderivada*:** Uma função F para a qual $F'(x) = f(x)$ para qualquer x no domínio de f é chamada de primitiva ou antiderivada de f.

Exemplos:

1) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 5x + 2$ é uma primitiva de $f(x) = x^2 + 5$, pois $F'(x) = x^2 + 5$.

2) $F(x) = \ln(x) + \cos(x) - 7$, $x > 0$, é uma primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{x} - sen\,(x)$, pois $F'(x) = \dfrac{1}{x} - sen\,(x)$.

Observação: A primitiva não é única. De fato, a função $f(x) = x^2 + 5$, por exemplo, poderia ter $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 5x + 5$, $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 5x - 1$ ou $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 5x + C$, onde C é uma constante qualquer, como primitiva. O mesmo se aplica para a função do exemplo 2). Portanto, temos a seguinte propriedade para primitivas:

Propriedade: Se F é uma primitiva de uma função contínua f, então qualquer outra primitiva de f tem a forma $G(x) = F(x) + C$, onde C é uma constante.

Integral Indefinida: Se f é uma função contínua, então a sua integral indefinida é dada por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,,$$

onde F é uma primitiva de f, C é uma constante, chamada constante de integração, o símbolo $\int$ é chamado sinal de integração, $f(x)$ é o integrando e dx é a diferencial de x, neste contexto, um símbolo indicando que a primitiva deve ser calculada em relação à variável x.

Dica: Para verificar se uma primitiva foi calculada corretamente, determine a derivada da solução $F(x)$ + C. Se essa derivada for igual a $f(x)$, então a primitiva está correta; se for diferente, existe algum erro nos cálculos.

A ligação que existe entre derivadas e primitivas permite usar regras já conhecidas de derivação para obter regras correspondentes para a integração. Assim temos o que chamamos de **integrais imediatas**, as quais são apresentadas na tabela abaixo:

$\int k\ dx = kx + C, \quad k\ constante$	$\int sen(x)dx = -\cos(x) + C$
$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall\ n \neq -1$	$\int \sec^2(x)dx = tg(x) + C$
$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C, \forall\ x \neq 0$	$\int \cos\sec^2(x)dx = -\cot g(x) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \sec(x)\, tg(x)dx = \sec(x) + C$
$\int \cos(x)\ dx = sen(x) + C$	$\int \cos\sec(x)\ \cot g(x)dx = -\cos\sec(x) + C$

Regras algébricas para Integração Indefinida:

1) $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$, k uma constante qualquer.

2) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Observação: Não existe regra para a integral do **produto** e do **quociente** de duas funções.

Exemplos: Calcule as integrais indefinidas abaixo:

1) $\int (x^{32} - \frac{6}{\sqrt{x}} + 8x^5 + \frac{1}{x^2} - x - 4)dx = \frac{x^{33}}{33} - 12\sqrt{x} + \frac{4x^6}{3} - \frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} - 4x + C$

2) $\int \left(\frac{x^3 + 2x - 7}{x} \right) dx = \int \left(x^2 + 2 - \frac{7}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} + 2x - 7\ln|x| + C$

3) $\int \left(\frac{e^x}{2} + x\sqrt{x} \right) dx = \int \left(\frac{e^x}{2} + x^{3/2} \right) dx = \frac{e^x}{2} + \frac{2x^{5/2}}{5} + C$

4) $\int \frac{1}{sen^2(x)} dx = \int \cos\sec^2(x)\, dx = -\cot g(x) + C$

5) $\int (\cos(t) - \sec(t)tg(t))dt = sen(t) - \sec(t) + C$

6) Estima-se que daqui a *t* meses a população de certa cidade esteja aumentando à taxa de $4+5t^{2/3}$ habitantes por mês. Se a população atual é 10.000 habitantes, qual será a população daqui a 8 meses?

Solução: Seja *p*(*t*) a população da cidade no tempo *t* (medido em meses). A taxa de variação de uma função é dada pela sua derivada. Assim, temos $p'(t) = 4 + 5t^{2/3}$ e, portanto, $p(t) = \int (4 + 5t^{2/3})\, dt = 4t + 3t^{5/3} + C$. Como p(0) = 10.000, substituindo na equação, encontramos C = 10.000. Logo, a função que representa a população num instante *t* qualquer é dada por $p(t) = 4t + 3t^{5/3} + 10.000$ e, conseqüentemente, daqui a 8 meses a população será de $p(8) = 4 \times 8 + 3 \times 32 + 10.000 = 10.128$ habitantes.

7) Um corpo está se movendo de tal forma que sua velocidade após *t* minutos é $v(t) = 1 + 4t + 3t^2$ m/min. Que distância o corpo percorre no terceiro minuto?

Solução: Seja *s*(*t*) a posição do corpo no tempo *t*. Como a velocidade é dada pela derivada da função posição, segue que $s'(t) = v(t)$, ou seja, $s(t) = \int v(t)\, dt$ ou $s(t) = t + 2t^2 + t^3 + C$. A distância que o corpo percorre no terceiro minuto é dada por

$s(3) - s(2) = 3 + 18 + 27 + C - 2 - 8 - 8 - C = 30.$

Portanto, o corpo percorre 30 metros no terceiro minuto.

8) Um estudo ambiental realizado em certa cidade revela que daqui a t anos o índice de monóxido de carbono no ar estará aumentando á razão de $0{,}1t + 0{,}1$ partes por milhão por ano. Se o índice atual de monóxido de carbono no ar é de 3,4 partes por milhão, qual será o índice daqui a 3 anos?

Solução: Seja $i(t)$ o índice de monóxido de carbono no ar no tempo t. Então, $i'(t) = 0{,}1t + 0{,}1$, ou $i(t) = 0{,}1\, t^2/2 + 0{,}1t + C$. Como $i(0) = 3{,}4$, segue que $C = 3{,}4$, ou seja, o índice de monóxido de carbono no ar em um tempo t qualquer é dado por $i(t) = 0{,}1\, t^2/2 + 0{,}1t + 3{,}4$. Em particular, quando $t = 3$, tem-se um índice de $i(3) = 4{,}15$ partes por milhão.

9) Um botânico descobre que certo tipo de árvore cresce de tal forma que sua altura $h(t)$, após t anos, está variando a uma taxa de $0{,}06t^{2/3} + 0{,}3t^{1/2}$ metros/ano. Se a árvore tinha 60 cm de altura quando foi plantada, que altura terá após 27 anos?

Solução: Temos $h'(t) = 0{,}06t^{2/3} + 0{,}3t^{1/2}$ e, portanto, a altura da árvore após t anos será dada por

$$h(t) = \int (0{,}06t^{2/3} + 0{,}3t^{1/2})\,dt = \frac{3\times 0{,}06t^{5/3}}{5} + \frac{2\times 0{,}3t^{3/2}}{3} + C.$$

Como $h(0) = 0{,}6$, segue que $C = 0{,}6$ e, substituindo na expressão de h, temos

$h(t) = \dfrac{3\times 0{,}06t^{5/3}}{5} + \dfrac{2\times 0{,}3t^{3/2}}{3} + 0{,}6$. Assim, após 27 anos a árvore medirá $h(27) = 8{,}748 + 28{,}059 + 0{,}6 = 37{,}41$ metros.

***Mudança de variável*:** Se f é uma função que se apresenta na forma $f(x) = g(u(x))\,u'(x)$, ou seja, se na expressão de f aparecer uma função e sua derivada, então a sua integral em relação a x pode ser calculada do seguinte modo: $\int f(x)\,dx = \int g(u(x))\,u'(x)\,dx = \int g(u)\,du$, onde $du = u'(x)dx$.

Este método de integração é chamado de mudança de variável, no qual mudamos a variável x para u, calculamos a integral em relação a u e depois retornamos a resposta para x.

Exemplos:

1) Calcule as integrais abaixo:

a) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

Seja $u(x) = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$. Substituindo no integrando, temos:

$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln(x^2+1) + C$, já que $x^2 + 1 > 0$ para todo x.

b) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

Seja $u(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$. Substituindo no integrando, temos:

$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C$.

c) $\int \frac{e^t\,dt}{\cos^2(e^t - 2)}$

Seja $u(t) = e^t - 2 \Rightarrow du = e^t\,dt$. Substituindo no integrando, temos:

$\int \frac{e^t\,dt}{\cos^2(e^t-2)} = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \sec^2 u\,du = tg\,(u) + C = tg(e^t) + C$.

d) $\int x^4 \cos(x^5)\,dx$

Seja $u(x) = x^5 \Rightarrow du = 5x^4\,dx \Rightarrow x^4\,dx = \frac{du}{5}$. Substituindo no integrando, temos:

$\int x^4\cos(x^5)\,dx = \int \frac{\cos u\,du}{5} = \frac{1}{5}\int \cos u\,du = \frac{1}{5} sen\,u + C = \frac{1}{5} sen\,(x^5) + C$

EXERCÍCIOS

1) Encontre a integral das funções abaixo e verifique se os cálculos estão corretos, derivando o resultado:

a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

b) $f(t) = 5t^{1/4} - 7t^{3/4}$

c) $f(u) = \dfrac{u^3 + 2u^2}{\sqrt{u}}$

d) $g(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$

e) $f(y) = 3\sqrt{y} - \dfrac{2}{y^3} + \dfrac{1}{y}$

f) $h(u) = 2e^u + \dfrac{6}{u} + \ln 2$

g) $f(x) = 3\sec^2(x)$

h) $v(t) = \dfrac{\cos(t)}{sen(t)}$

i) $f(x) = tg(x)$

j) $f(x) = 2xe^{x^2-1}$

k) $f(t) = t\left(t^2 + 1\right)^5$

l) $f(y) = \dfrac{y^2}{\left(y^3 + 5\right)^2}$

m) $f(x) = \dfrac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

n) $f(x) = \dfrac{\ln(5x)}{x}$

o) $f(x) = x^2 sen(3x^3)$

p) $f(t) = 3t\sqrt{t^2 + 8}$

2) Seja $f(x)$ o número total de itens que uma pessoa consegue memorizar, x minutos após ser apresentado a uma longa lista de itens. Os psicólogos chamam a função $y = f(x)$ de curva de aprendizado e a função $y'(x) = f'(x)$ de taxa de aprendizado. O instante de máxima eficiência é aquele para o qual a taxa de aprendizado é máxima. Suponha que a taxa de aprendizado seja dada pela expressão $f'(x) = 0{,}1(10 + 12x - 0{,}6x^2), \quad 0 \le x \le 25$.

a) Qual é a taxa de aprendizado no instante de máxima eficiência?

b) Qual é a função $f(x)$?

c) Qual é o maior número de itens que uma pessoa consegue memorizar?

3) Um corpo está se movendo de tal forma que sua velocidade após t minutos é $v(t) = 3 + 2t + 6t^2$ m/min. Que distância o corpo percorre no segundo minuto?

4) Depois que os freios são aplicados, um carro perde velocidade à taxa constante de 6 metros por segundo por segundo. Se o carro está a 65 km/h (18 m/s) quando o motorista pisa no freio, que distância o carro percorre até parar?

5) De acordo com uma das leis de Poiseuille para o fluxo de sangue em uma artéria, se $v(r)$ é a velocidade do sangue a r cm do eixo central da artéria, a taxa de variação da velocidade com r é dada por $v'(r) = -ar$, onde a é uma constante positiva. Escreva uma expressão para $v(r)$ supondo que $v(R) = 0$, onde R é o raio da artéria.

6) O valor de revenda de uma certa máquina diminui a uma taxa que varia com o tempo. Quando a máquina tem t anos de idade, a taxa com que o valor está mudando é $-960\, e^{-t/5}$ reais por dia. Se a máquina foi comprada nova por R$ 5.000,00, quanto valerá 10 anos depois?

7) Em um certo subúrbio de Los Angeles, a concentração de ozônio no ar, $L(t)$, é de 0,25 partes por milhão (ppm) às 7h. De acordo com o serviço de meteorologia, a concentração de ozônio t horas mais tarde estará variando à razão de $L'(t) = \dfrac{0{,}24 - 0{,}03t}{\sqrt{36 + 16t - t^2}}$ ppm/h.

a) Expresse a concentração de ozônio em função de t. Em que instante a concentração de ozônio é máxima? Qual é a máxima concentração?

b) Faça o gráfico de $L(t)$ e, baseado nele, responda as perguntas do item a). Determine em que instante a concentração de ozônio é a mesma que às 11h.

8) Uma empresa montou uma linha de produção para fabricar um novo modelo de telefone celular. Os aparelhos são produzidos à razão de $\dfrac{dP}{dt} = 1.500\left(2 - \dfrac{t}{2t+5}\right)$ unidades/mês.

Determine quantos telefones são produzidos durante o terceiro mês.