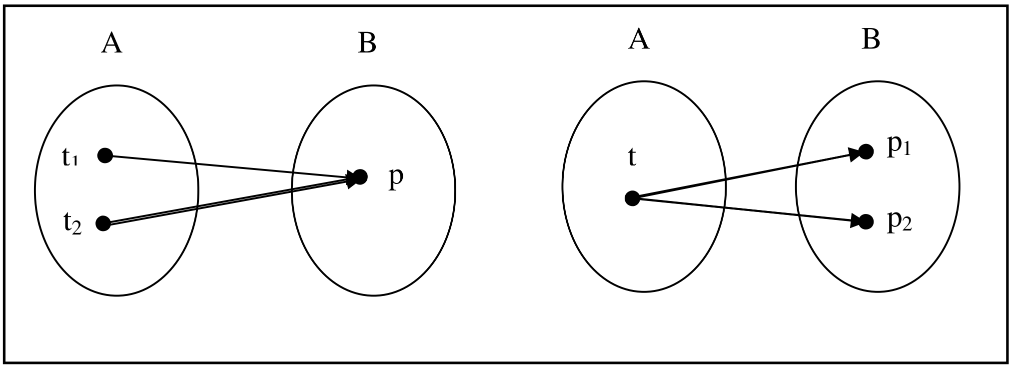
2. Funções

O conceito de função está relacionado à idéia de associação de um elemento a outro, segundo uma regra específica. Assim, por exemplo, podemos considerar o tamanho de uma população relacionado apenas ao tempo (ou variando em função da variação do tempo), ou associado ao tempo e ao espaço, ou a qualquer outro fator que interfira na população em estudo; o preço de um produto pode estar associado apenas ao seu custo de produção, ou ao seu custo e à margem de lucro do fabricante, ou ainda, ao seu custo, à margem de lucro do fabricante e à demanda; o volume de uma esfera pode estar associado apenas ao tamanho de seu raio, porém o raio pode variar com o tempo e assim, o volume estará variando também com a variação do tempo; e assim por diante. Como podemos observar, o conceito de função envolve uma relação de dependência, onde um elemento depende de outro ou de vários outros, os quais podem variar livremente. Como a variação de um deles acarreta na variação do que depende dele, chamamo-nos de elementos variáveis ou simplesmente variáveis. Deste modo, para cada associação, temos uma variável dependente e uma ou mais, independentes. Chamaremos de função à variável dependente e simplesmente de variáveis, às variáveis independentes, o que é bem intuitivo, uma vez que um elemento varia em **função** da variação daquele do qual depende.

O tratamento matemático destas relações facilita muito a análise e compreensão das mesmas, e por isso o estudo das *funções matemáticas* é tão importante em todas as áreas do conhecimento. Assim, trataremos nesta seção do estudo das funções elementares e mais utilizadas, considerando neste momento, apenas as funções que dependem de uma única variável e fazendo uma abordagem mais compreensiva, sem preocupação com as demonstrações e o rigor matemático.

Definição**:* Uma ***função matemática é uma relação entre dois conjuntos quaisquer que associa, **a cada elemento de partida**, denominado *domínio*, **um único elemento de um conjunto de chegada**, denominado *contra-domínio*. Os elementos do conjunto contra-domínio que são imagem de algum elemento do domínio constituem o conjunto *imagem* da função.

Da definição acima podemos observar que uma função matemática é uma relação particular entre dois conjuntos, onde a premissa básica é a de que **cada elemento do domínio** possui **uma única imagem**, segundo aquela regra ou função. Do ponto de vista prático, podemos considerar, por exemplo, que se uma função descreve a posição de um objeto em movimento, a qual varia com o tempo, é sabido que em um dado instante o objeto não poderá ocupar duas posições diferentes, embora em dois instantes diferentes ele possa ocupar a mesma posição. Isso significa que dois ou mais elementos do domínio podem ter a mesma imagem, porém um elemento não pode ter várias imagens diferentes. O esquema abaixo ilustra tal situação, onde o diagrama da esquerda representa o gráfico de uma função, enquanto que o da direita não.



Uma função pode ser representada por vários meios, como por exemplo, o diagrama acima, ou uma expressão matemática, um gráfico, uma expressão verbal, dentre outros. A expressão matemática e o gráfico são as formas mais utilizadas no estudo matemático.

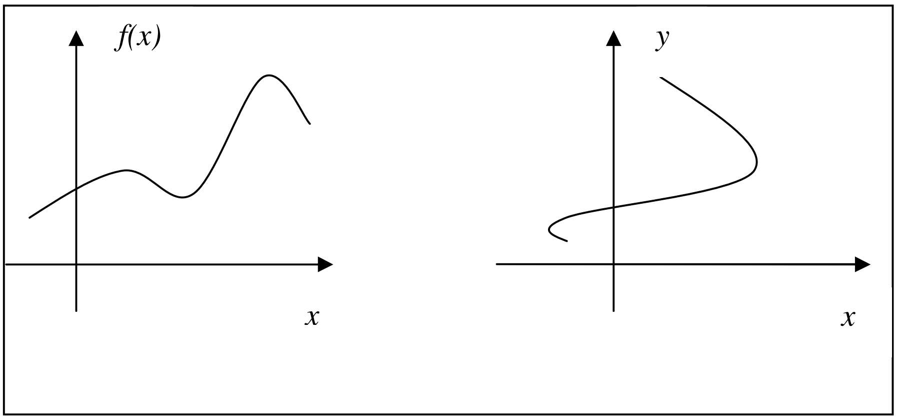
A **expressão matemática** de uma função f que a cada ponto t de um conjunto A associa um ponto $f(t)$ de um conjunto B é dada por: $\begin{array}{rcl} f: A & \rightarrow & B \\ t & \mapsto & f(t) \end{array}$. Neste caso, A é o domínio e B é o contra-domínio de f.

O **gráfico** de uma função f é o subconjunto do plano xy dado por:

$$G = \{(x, y) \in R^2 : y = f(x)\},$$

o qual é posicionado num sistema de eixos cartesianos, onde o eixo horizontal contém a variável independente x (domínio), o eixo vertical contém a variável dependente $y = f(x)$ (imagem), os eixos se cruzam na origem e o sentido de crescimento se dá da esquerda para a direita e de baixo para cima. Assim, o gráfico de uma função real descreve uma curva no plano, a qual representa o seu comportamento e facilita muito o seu entendimento. É, portanto, uma ferramenta básica no estudo de cálculo.

Na figura seguinte observamos dois gráficos, sendo que o da esquerda representa o gráfico de uma função, enquanto que o da direita não, uma vez que existem valores de x com dois y correspondentes.



Como podemos ver, a representação gráfica nos permite saber se um gráfico representa ou não uma função. Para isso basta traçarmos retas paralelas ao eixo *y* e ver quantas vezes estas retas interceptam a curva; se interceptar mais de um a vez, então a curva não é gráfico de função.

Exemplos

1) Durante um programa nacional de imunização da população contra uma forma virulenta de gripe, representantes do Ministério da Saúde constataram que o custo de vacinação de x % da população era de aproximadamente $f(x) = \dfrac{150x}{200 - x}$ milhões de reais.

a) Qual é o domínio da função *f(x)*?

b) Para que valores de *x*, no contexto do problema, *f(x)* tem interpretação prática?

c) Qual foi o custo para que os primeiros 50% da população fossem vacinados?

d) Qual foi o custo para que os 50% restantes da população fossem vacinados?

e) Qual a porcentagem vacinada da população, quando foram gastos 37,5 milhões de reais?

f) Faça o gráfico da função, especificando sua parte relevante, tendo em vista a situação prática do problema em questão.

Solução:

a) $Dom(f) = \{x \in R : x \neq 200\}$

b) Como x representa o percentual da população a ser vacinada, segue que $x \in [0, 100]$.

c) Como queremos saber o custo para vacinar 50% da população, basta calcularmos $f(50)$:

$$f(50) = \frac{150 \times 50}{200 - 50} = \frac{150 \times 50}{150} = 50.$$

Portanto, o custo para vacinar os primeiros 50% da população é de 50 milhões de reais.

d) O custo para que os 50% restantes da população sejam vacinados é igual ao custo para vacinar a população total menos o custo para vacinar os primeiros 50%, ou seja, *f(100) – f(50)*. Como *f(50)* já é conhecido, basta calcularmos *f(100)*:

$$f(100) = \frac{150 \times 100}{200 - 100} = \frac{150 \times 100}{100} = 150 .$$

Portanto, *f(100) – f(50)* = 100. Logo, o custo para vacinar os 50% restantes da população é de 100 milhões de reais.

e) A pergunta que se faz é: qual o valor de *x* para que se tenha *f(x)* = 37,5 ?

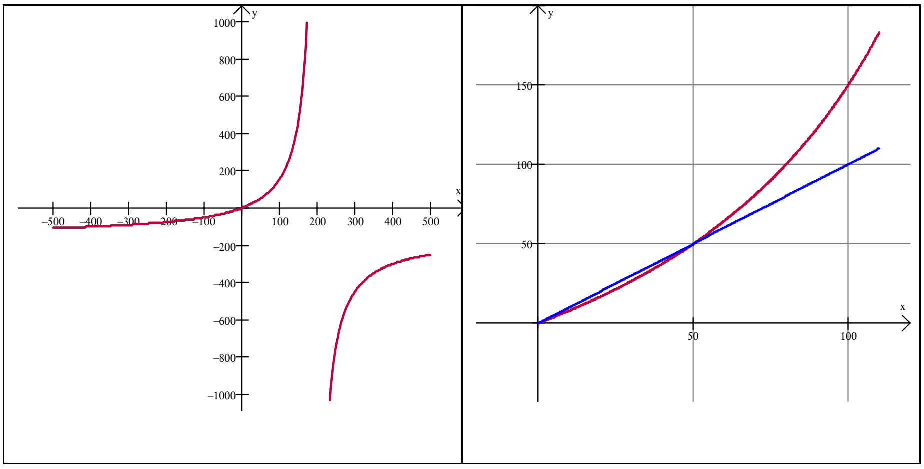
Para respondê-la, basta resolvermos a equação:

$$\frac{150x}{200 - x} = 37{,}5 \Leftrightarrow 150x = 37{,}5(200 - x) \Leftrightarrow (150 + 37{,}5)x = 7500 \Leftrightarrow$$

$$187{,}5x = 7500 \Leftrightarrow x = \frac{7500}{187{,}5} \Leftrightarrow x = 40.$$

Portanto, foram vacinados 40% da população quando haviam gastado 37,5 milhões de reais.

f)



O gráfico da esquerda mostra o comportamento da função matemática *f*, sem se preocupar com o problema físico. Já o da direita considera como domínio apenas o intervalo de interesse. Fizemos uma comparação do gráfico com a reta *y* = *x* e podemos observar que após os primeiros 50% vacinados, o custo cresce mais rapidamente.

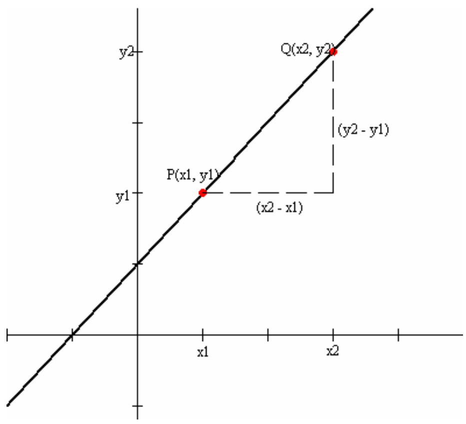
2.1 Funções lineares: são funções cujos gráficos descrevem retas no plano e são expressas por

$$\begin{aligned} f : R &\to R \\ x &\mapsto ax + b \end{aligned}$$

sendo *a* e *b* constantes e o domínio, todos os reais. Observe que se $b = 0$, então o gráfico é uma reta passando pela origem, enquanto que se $a = 0$, o gráfico é uma reta paralela ao eixo *x*, interceptando o eixo *y* em *b* e, neste caso, é dita *função constante*. *a* é dito coeficiente angular da reta e se for positivo, a reta tem sentido crescente; caso contrário, decrescente. *b* é o coeficiente linear.

Muitos problemas não apresentam a expressão da função e faz parte da solução, encontrá-la. Isso é chamado de modelagem matemática e consiste em encontrar uma função matemática que represente um determinado fenômeno físico, químico, biológico, econômico, etc. No caso da função ser linear, basta conhecermos dois pontos pertencentes ao seu gráfico para determinarmos a função, pois já vimos que o gráfico de toda função linear é uma reta. Com a Geometria Euclidiana aprendemos que por dois pontos passa uma única reta e a Geometria Analítica nos diz como expressar esta reta em "linguagem" matemática. Logo, basta relembrarmos como se faz isso ...

O **coeficiente angular** de uma reta **r** é definido como sendo a tangente do ângulo (α) que esta reta faz com a reta horizontal que a intercepta. Se estivermos considerando um sistema de coordenadas, esta reta horizontal coincide com o eixo-*x*. Observando a figura abaixo, notamos que, dados dois ponto P e Q e a reta que passa por eles, podemos construir um triângulo retângulo a partir de uma reta paralela ao eixo-*x*, passando por P, e uma reta paralela ao eixo-*y*, passando por Q.



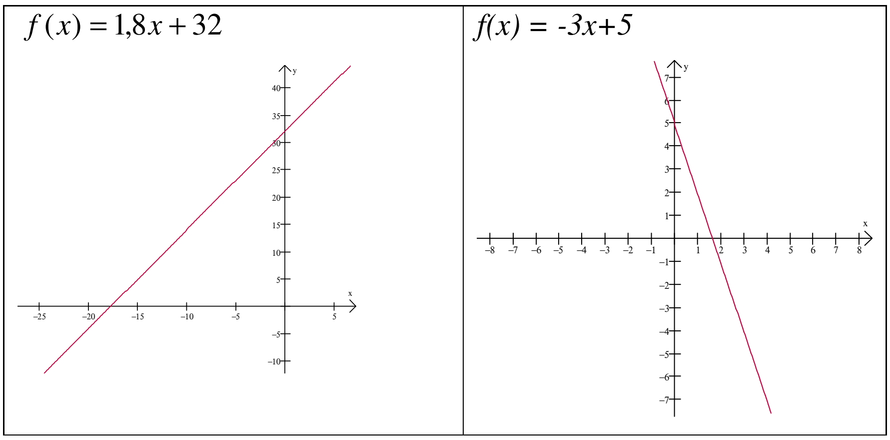
Das relações sobre triângulos, segue que $tg(\alpha) = \dfrac{cateto\ oposto}{cateto\ adjascente} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Portanto, o coeficiente angular de **r**, que chamaremos de *a*, é dado por $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Mas este mesmo raciocínio vale para quaisquer dois pontos sobre **r**, ou seja, se tomarmos um ponto genérico (x, y), também teremos $a = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y - y_2}{x - x_2}$. Desta igualdade resulta que $y - y_1 = a\,(x - x_1)$ ou $y - y_2 = a\,(x - x_2)$, o que é equivalente a $y = ax + b$, onde $b = y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2$. Esta é a chamada equação reduzida da reta.

Exemplos:

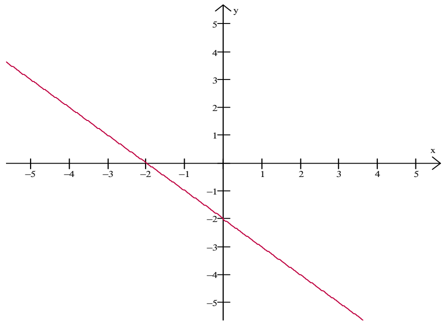
1) A temperatura em graus Fahrenheit é uma função linear da temperatura em graus Celsius. Use o fato de que 0 ^oC = 32 ^oF e 100 ^oC = 212 ^oF para escrever uma função que forneça a conversão de temperatura de uma graduação para outra. Use a função obtida para converter 15 graus Celsius em graus Fahrenheit e 68 graus Fahrenheit em graus Celsius.

Solução: Seja *c* a medida Celsius e *F(c)* a medida Fahrenheit. Como a função solicitada é linear e os pontos (0, 32) e (100, 212) pertencem à reta que é o gráfico da função, segue que seu coeficiente angular é então dado por $a = \dfrac{212 - 32}{100 - 0} = \dfrac{180}{100} = 1{,}8$. Como a equação da reta pode ser dada por $y - y_0 = a\,(x - x_0)$, onde *a* é o coeficiente angular e $(x_0\,,\, y_0)$ é um ponto pertencente à ela, segue que a função solicitada pode ser dada por $F(c) = 1{,}8\,c + 32$. Assim, para converter 15 graus Celsius em Fahrenheit basta substituir *c* por 15 e obter *F*(15) = 59, ou seja, 15 ^oC = 59 ^oF. De modo análogo verificamos que 68 ^oF = 20 ^oC.

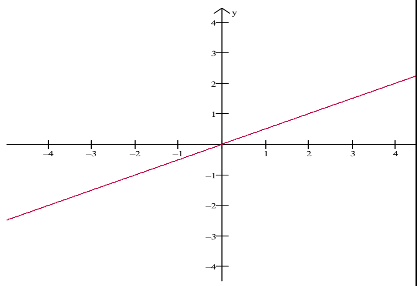
Vejamos o gráfico desta e outras funções lineares:



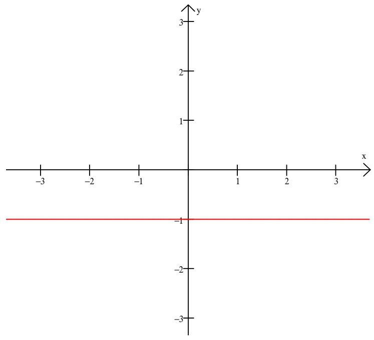
$f(x) = -x-2$



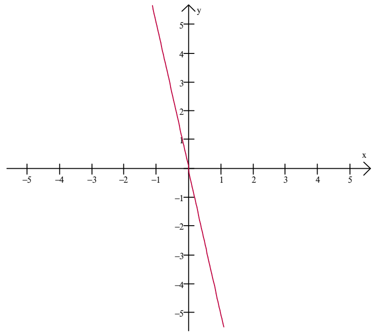
$f(x) = \frac{1}{2}x$



$f(x) = -1$



$f(x)=-5x$



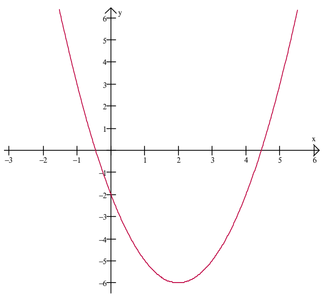
2.2 Funções quadráticas: são funções cujos gráficos são parábolas e são expressas por

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

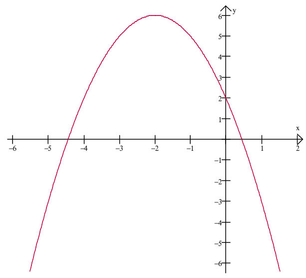
onde *a, b* e *c* são constantes e $a \neq 0$. Dom(f) = $\mathbb{R}$.

Exemplos:

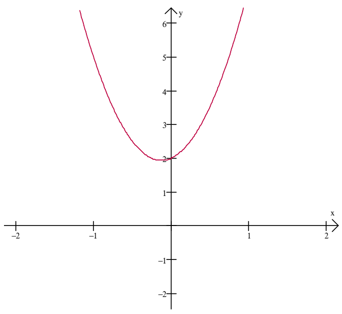
$f(x) = x^2 - 4x - 2$



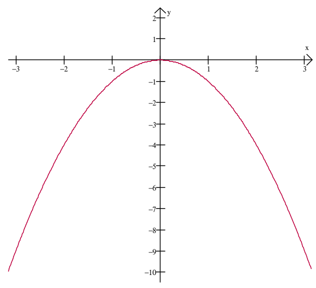
$f(x) = -x^2 - 4x + 2$



$f(x) = 4x^2 + x + 2$



$f(x) = - x^2$



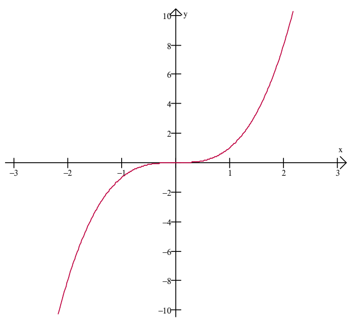
2.3 Funções cúbicas: são funções cujos gráficos recebem o mesmo nome e são expressas por

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$$

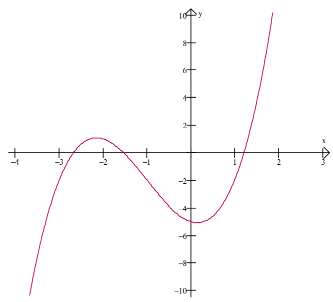
onde *a, b, c* e *d* são constantes e $a \neq 0$. Dom(*f*) = $\mathbb{R}$.

***Exemplos*:**

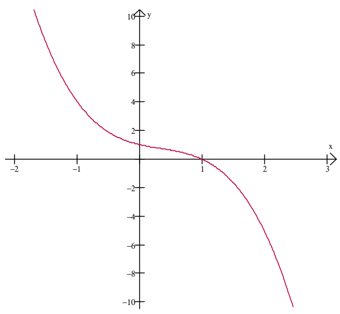
$f(x) = x^3$



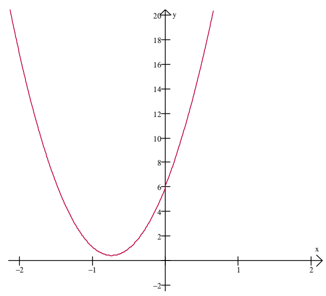
$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 5$



$f(x) = - x^3 + x^2 - x + 1$



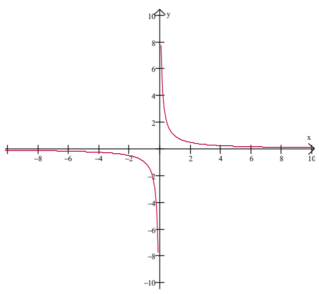
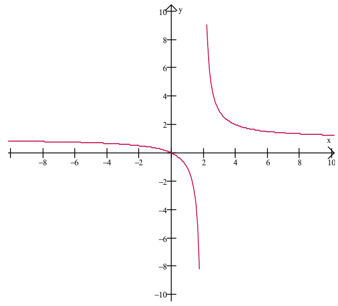
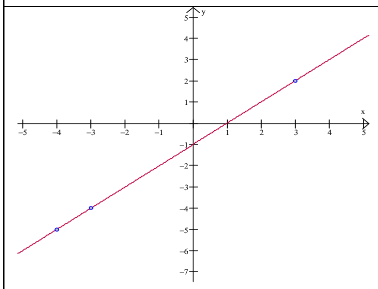
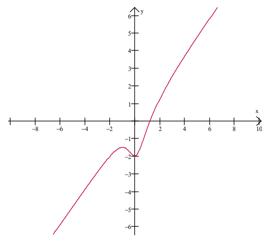
$f(x) = - 0,1x^3 + 10x^2 + 15x + 6$



2.4 Funções polinomiais: são funções descritas por polinômios, ou seja, funções do tipo $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, onde $n \in N$.

2.5 Funções racionais: são funções dadas pelo quociente entre dois polinômios, ou seja, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios. $Dom(f)=\{x\in R : Q(x)\neq 0\}$.

Exemplos:

$f(x)=1/x$ 	$f(x) = x/(x-2)$ 
	$f(x)=(x^3-2)/(x^2+1)$ 

$f(x) = (x^2+3x-4)(x^2-9)/(x^2+x-12)(x+3)$

Observe que ao trabalharmos com funções racionais devemos tomar cuidado com o domínio de definição da função, uma vez que o denominador não pode se anular. Assim, nos exemplos acima notamos que $f(x)=1/x$ não está definida em $x = 0$; $f(x) = x/(x-2)$ não está definida em $x = 2$ e $f(x) = (x^2+3x-4)(x^2-9)/(x^2+x-12)(x+3)$ não está definida em $x = -4$, $x = -3$, $x = 3$, já que $(x^2+x-12) = (x-3)(x+4)$. Isso significa que estes valores não pertencem aos domínios das respectivas funções. No entanto a função $f(x)=(x^3-2)/(x^2+1)$ está definida em todos os reais, pois (x^2+1) não se anula se x é um número real.

Outra observação importante é que **devemos tomar muito cuidado com o uso do computador** para fazer gráficos de funções, pois nem sempre o gráfico obtido é o esperado. No caso da função $f(x) = (x^2+3x-4)(x^2-9)/(x^2+x-12)(x+3)$, por exemplo, a maioria dos *softwares* gráficos faria a reta contínua como sendo o seu gráfico, ignorando o fato de existirem três pontos que anulam o denominador. Isso ocorre pelo fato de que *f(x)* pode ser escrita como:

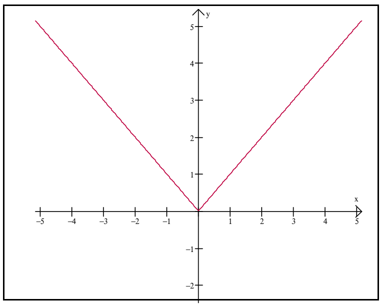
$$f(x)=\frac{(x^2+3x-4)(x^2-9)}{(x^2+x-12)(x+3)}=\frac{(x-1)(x+4)(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+4)(x+3)}.$$

Bem, se $x\neq 3,\ x\neq -4\ e\ x\neq -3$, então podemos cancelar os termos comuns e teremos a função *f(x) = x – 1*, cujo gráfico é uma reta contínua, ou seja, sem interrupções. E é isso o que a maioria dos *softwares* fazem. Todavia, sabemos, por exemplo, que se *x = 3*, então teremos $\frac{x-3}{x-3}=\frac{0}{0}\neq 1$, o que nos impede de cancelar este termo. Raciocínio análogo se aplica aos demais. Daí os três “furinhos” no gráfico. Outros exemplos são os gráficos das funções *f*(*x*) = 1/*x* e *f*(*x*) = *x/(x-2)*, que na vizinhança de *x* = 0 e *x* = 2, respectivamente, se apresenta limitado, ou seja, a curva é interrompida. No entanto, se *x* é muito pequeno (*x* → 0), 1/*x* é muito grande (1/*x* → ∞), do mesmo modo que se *x* está muito próximo de 2, então *x/(x-2)* também é muito grande (*x/(x-2)* → ∞), ou seja, os gráficos nestas vizinhanças deveriam crescer (e decrescer) infinitamente, o que não ocorreu por limitações do programa gráfico que os realizaram.

2.6 Função módulo: é a função definida por

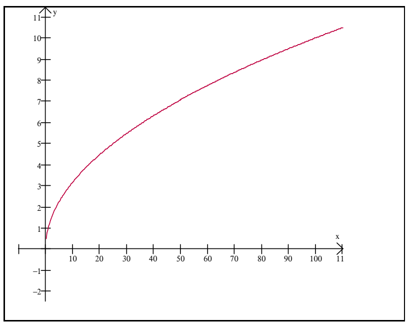
$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & se\ x\geq 0\\ -x, & se\ x<0\end{cases}.$$

Dom(*f*) = ℝ.



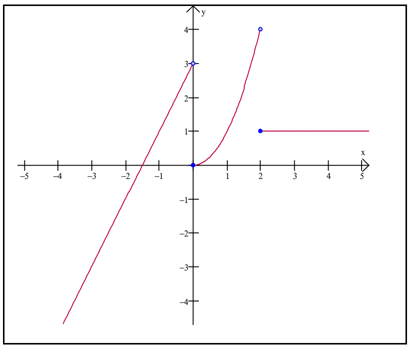
2.7 Função raiz quadrada:

$f(x)=\sqrt{x}$. $Dom(f)=\{x\in R: x\geq 0\}$.

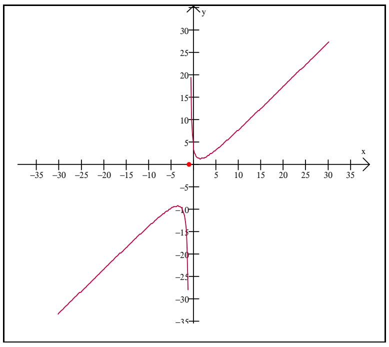


2.7 Funções definidas por partes (exemplos):

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$



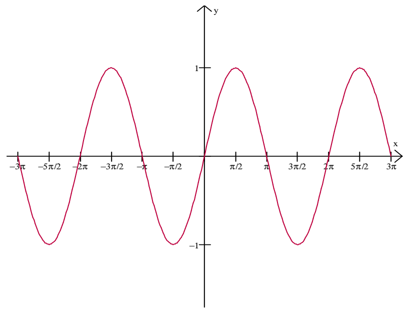
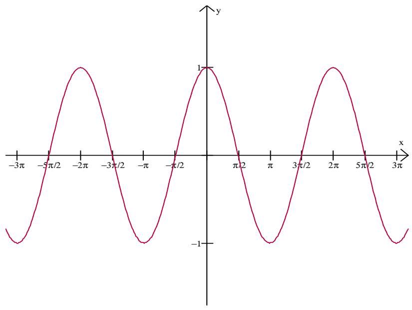
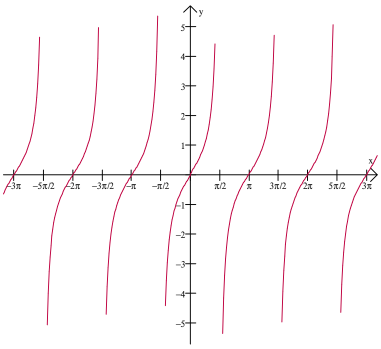
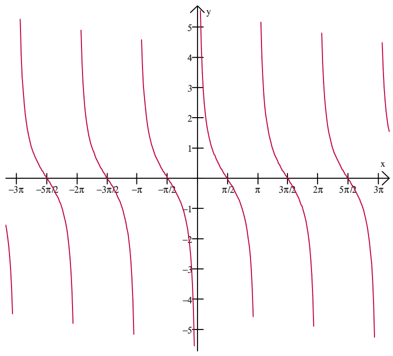
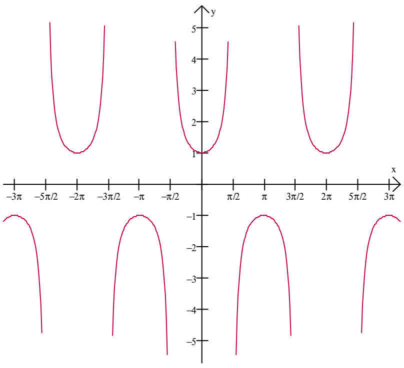
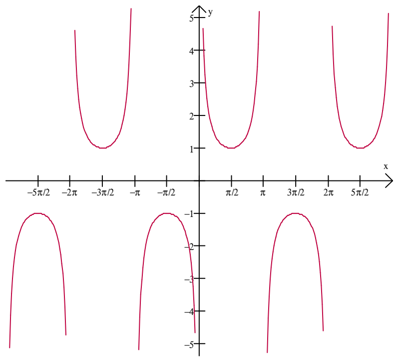
b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x + 4}{x+1}, & x \neq -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$



2.8 Funções trigonométricas: as principais funções trigonométricas são as funções seno e co-seno, as quais possuem comportamento ondulatório e são definidas para todo *x* real. São utilizadas para modelar fenômenos periódicos, que se repetem com uma determinada freqüência. As demais, como tangente, co-tangente, secante e co-secante, são definidas a partir do seno e co-seno, e são dadas por:

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}, \quad \cot g(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}, \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad \cos\sec(x) = \frac{1}{sen(x)}.$$

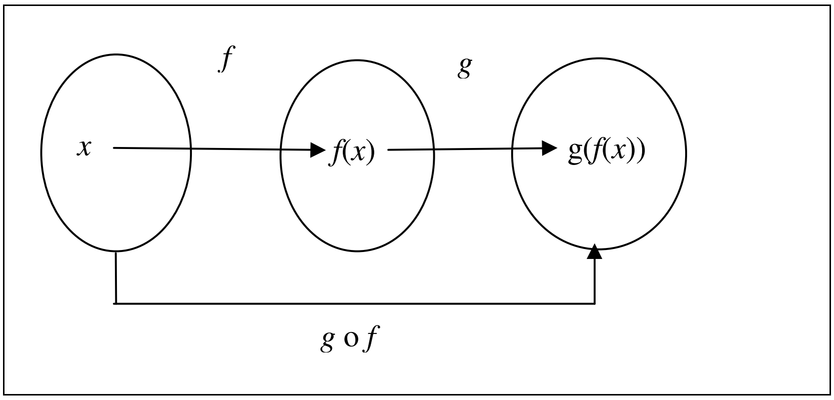
É importante observar que quando estamos trabalhando com **funções trigonométricas**, o domínio é um sub-conjunto de $\mathbb{R}$ e, portanto, **as variáveis não podem ser expressas em graus** e sim**, em radianos**, que são representações reais das medidas angulares. Para fazer a conversão, basta usar a relação $1^{\circ} = \dfrac{\pi}{180}\,rad$. Vejamos os seus gráficos:

f(x) = sen (x) $D = \mathbb{R}$ 	*f(x)=cos(x)* $D = \mathbb{R}$ 
f(x)=tg(x) $D = \mathbb{R}$-{π/2+kπ} 	*f(x)=cotg(x)* $D = \mathbb{R}$-{kπ} 
f(x)=sec(x) $D = \mathbb{R}$-{π/2+kπ} 	*f(x)=cossec(x)* $D = \mathbb{R}$-{kπ} 

Composição de funções: Existem muitas situações nas quais uma quantidade é dada como uma função de uma variável que, por sua vez, pode ser escrita como função de uma segunda variável, e assim por diante. Compondo-se as funções de maneira apropriada, pode-se expressar a quantidade original como função da última variável. Esse processo é chamado *composição de funções* e definido do seguinte modo:

***Definição*:** Sejam $f : A \to B$ e $g : \text{Im}\, f \to C$. Definimos a composta de g com f e denotamos por $g \circ f$ à função dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

O esquema seguinte ilustra a definição:



Exemplos:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ é a composição das funções $g(u) = \sqrt{u}$ e $u(x) = x^2 - x$, já que

$$(g \circ u)(x) = g(u(x)) = g(x^2 - x) = \sqrt{x^2 - x}\,.$$

2) $f(x) = 5 - |x+1|$ é a composição das funções $g(u) = 5 - |u|$ e $u(x) = x + 1$, já que

$$(g \circ u)(x) = g(u(x)) = g(x+1) = 5 - |x+1|\,.$$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ é a composição das funções $g(u) = \dfrac{u}{x}$, $u(v) = \sqrt{v}$ e $v(x) = 1 - x^2$,

já que

$$(g \circ u \circ v)(x) = g((u \circ v)(x)) = g(u(v(x))) = g(u(1-x^2)) =$$

$$g(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

4) Um estudo das condições ambientais de uma comunidade suburbana indica que a taxa média diária de monóxido de carbono no ar será de $c(p) = 0{,}5p + 1$ partes por milhão (ppm), quando a população for de p milhares. Estima-se que daqui a t anos, a população da comunidade será de

$p(t) = 10 + 0{,}1t^2$ milhares. Expresse a taxa de monóxido de carbono no ar como uma função do tempo.

Solução: Como a taxa de monóxido de carbono está relacionada a *p* pela equação $c(p) = 0{,}5p + 1$, e a variável *p* está relacionada à variável *t* pela equação $p(t) = 10 + 0{,}1t^2$, a função composta $c(p(t)) = 0{,}5(10 + 0{,}1t^2) + 1 = 6 + 0{,}05t^2$ expressa a taxa de monóxido de carbono no ar como função da variável *t*.

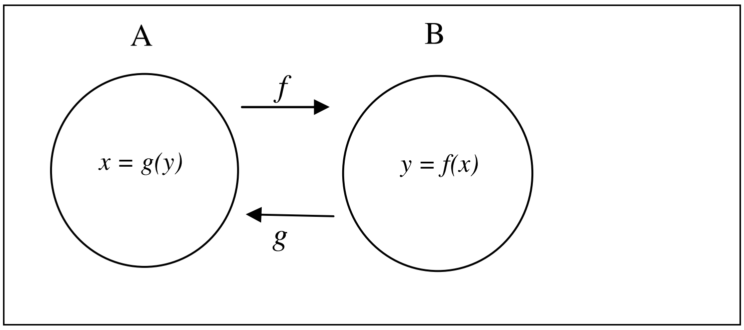
Importante: Imagine um conjunto formado por todas as funções reais. Vamos chamá-lo de $\mathcal{F}$. Portanto, os elementos de $\mathcal{F}$ são funções com domínio e imagem em $\mathbb{R}$ e como em todo conjunto, podemos definir operações e propriedades. As operações de soma, subtração, produto e divisão já são bem familiares entre as funções, ou seja, já estamos acostumados a somar duas funções, dividir uma pela outra, multiplicar e assim por diante. Note que a composição é uma outra operação que podemos fazer com as funções, a qual não fazemos com números reais. Portanto, esta é uma operação definida no conjunto de funções e como tal, também possui propriedades, dentre as quais, destacamos:

- **Elemento neutro:** é uma função que, ao ser composta com qualquer outra, não altera esta outra. Portanto, o elemento neutro em relação à operação composição, é a função identidade, denotada por i_d, e tal que $i_d(x) = x, \forall\, x \in R$. De fato, para toda função real *f*, tem-se $(f \circ i_d)(x) = f(i_d(x)) = f(x)$ e $(i_d \circ f)(x) = i_d(f(x)) = f(x)$.

- **Funções inversas:** Se *f* é bijetora (injetora e sobrejetora), então *f* é inversível, ou seja, existe uma função *g* tal que *g* é a inversa da *f*, a qual "desfaz o que a *f* faz". Na linguagem matemática escrevemos:

  Se $f : A \to B$ é bijetora, então existe $g : B \to A$ tal que $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$.

  O esquema abaixo permite a visualização da definição:



Observações:

1. A **notação** para a função inversa é $g = f^{-1}$, o que não deve ser confundido com o inverso multiplicativo de *f*, ou seja, $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$. f^{-1} é a inversa de *f* em relação à operação composição e não em relação à multiplicação.

2. Pela observação 1, se f^{-1} é a inversa de *f*, então a composta entre elas é a função identidade, que é o elemento neutro. Logo, $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i_d$. Assim,

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall\, x \in Dom(f)$$
$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad \forall\, x \in Dom(f^{-1}).$$

3. Dada uma função algébrica, para calcularmos sua inversa fazemos $y = f(x)$ e isolamos x como função de y.

4. Os gráficos de *f* e f^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$.

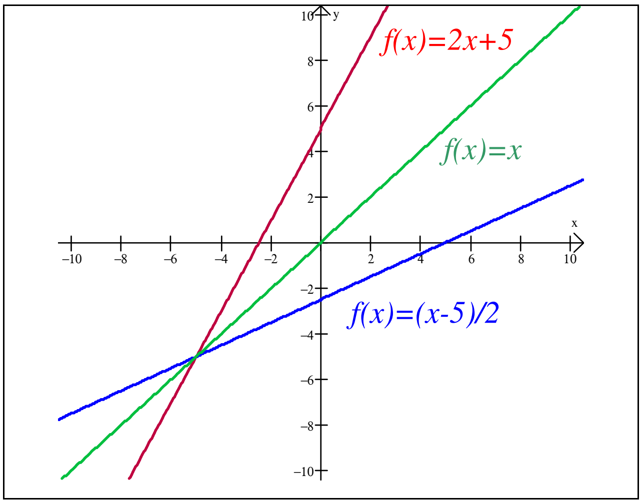
Exemplos:

1) Se $f(x) = 2x + 5$, calcule sua inversa.

Solução: $y = 2x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = y - 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{y-5}{2} = g(y).$

Portanto, a inversa de *f* , escrita como função de *x*, é dada por $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$.

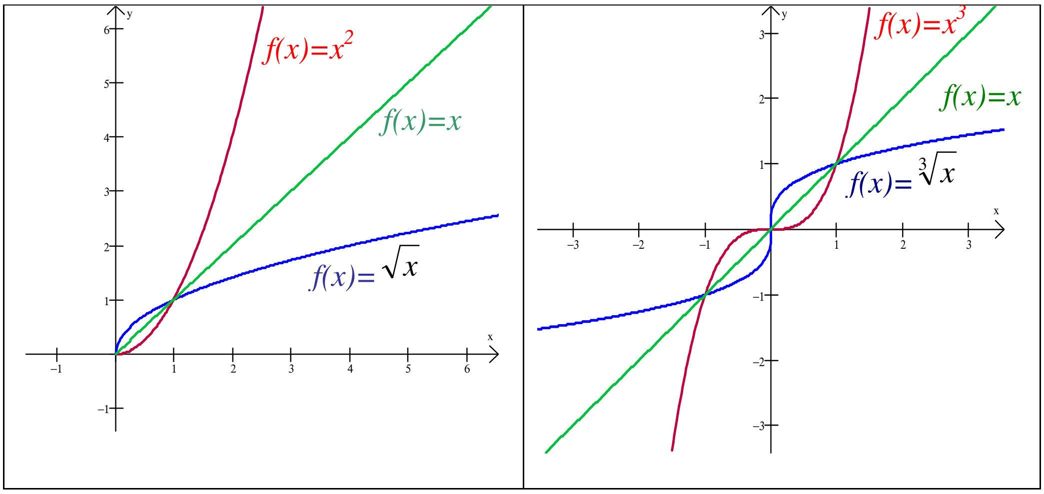
De fato,
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+5) = \frac{2x+5-5}{2} = \frac{2x}{2} = x, \quad \forall\, x \in R$$
$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-5}{2}\right) = 2\left(\frac{x-5}{2}\right) + 5 = x - 5 + 5 = x, \quad \forall\, x \in R.$$



2) Se $f(x) = x^n$, então $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}, \quad \forall\, n \in N, n > 2$. Exemplos:

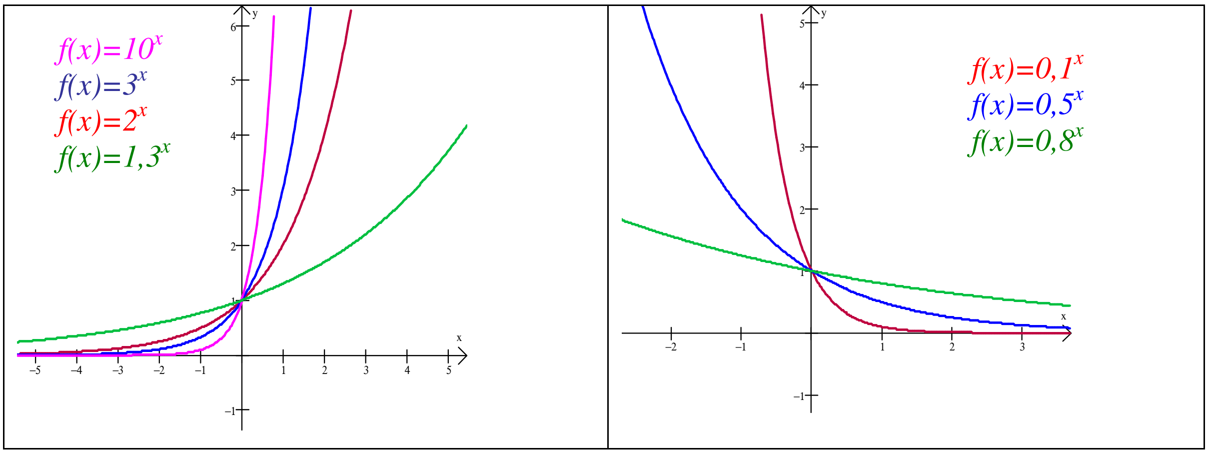
$$f(x) = x^2 \;\Rightarrow\; f^{-1}(x) = \sqrt{x} : \begin{cases} f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \forall\, x \geq 0 \\ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x, \forall\, x \geq 0. \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 \;\Rightarrow\; f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} : \begin{cases} f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x, \forall\, x \in R \\ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x, \forall\, x \in R. \end{cases}$$



2.9 Funções Exponenciais: são funções que apresentam crescimento (ou decrescimento) muito rápido e, por isso, utilizadas para representar fenômenos que possuem esta característica, por exemplo, crescimento de bactérias, decaimento radioativo de elementos químicos, juros compostos, etc. São definidas da seguinte forma:

Definição: Se b é um número positivo diferente de 1 ($b > 0, b \neq 1$), então a *função exponencial de base b* é definida como $f(x) = b^x$, para qualquer número real x. Exemplos:



Observações:

1. Da definição decorre que se $0 < b < 1$, então a função é decrescente e se aproxima de zero para valores grandes de x, enquanto que se $b > 1$, então a função é crescente e se aproxima de zero à medida que x decresce negativamente.

2. Se $x = 0$, então $b^0 = 1$, ou seja, para qualquer valor da base, o gráfico intercepta o eixo y quando $y = 1$.

3. Para que a função exponencial pudesse ser definida em todos os reais, algumas restrições foram necessárias à base, como por exemplo, o fato de b ser diferente de 1 (1^x só tem significado se x é finito, mas os reais compreendem o infinito também) e não poder ser negativo (um exemplo de problema: $b < 0 \Rightarrow b^{1/2} = \sqrt{b} \notin R$).

4. Valem para as funções exponenciais todas as propriedades válidas para expoentes, ou seja:

a) $b^x = b^y \Leftrightarrow x = y$

b) $b^x\, b^y = b^{x+y}$

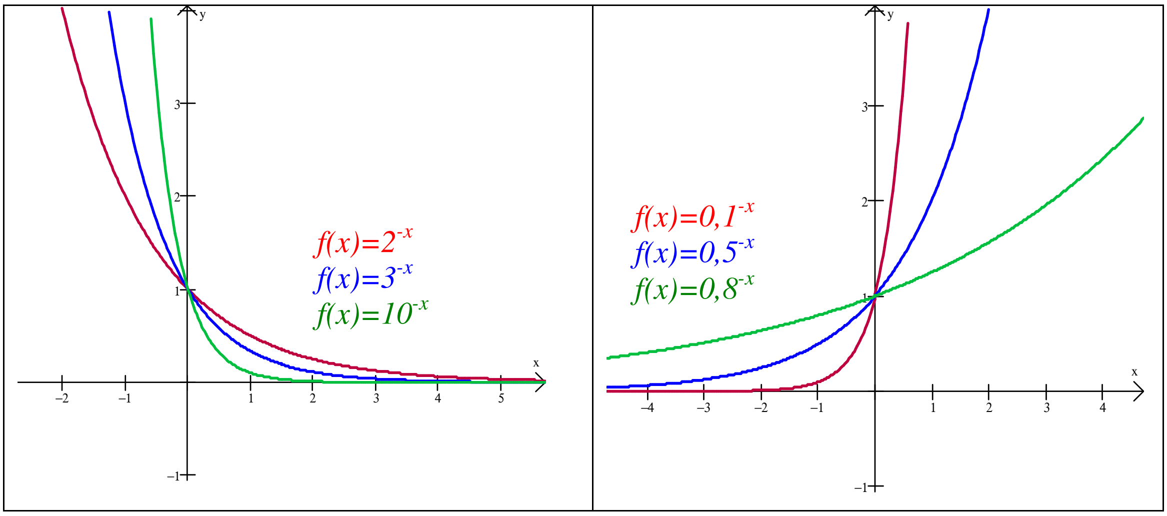
c) $b^x / b^y = b^{x-y}$

d) $(b^x)^y = b^{xy}$

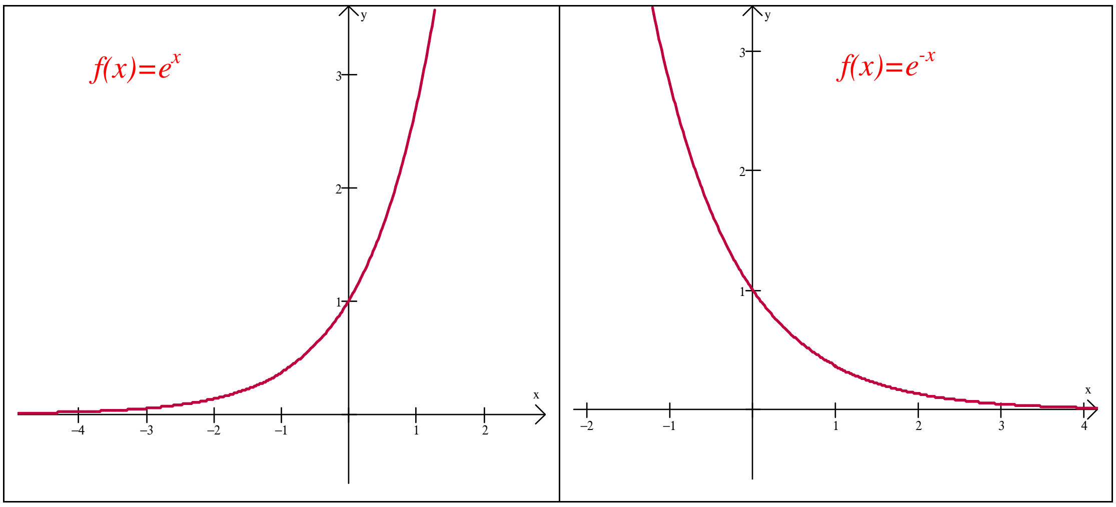
e) $(a\, b)^x = a^x\, b^x$

f) $(a/b)^x = a^x / b^x$

5. É comum também a utilização da função $f(x) = b^{-x} = 1/b^{x}$, cujo gráfico possui comportamento inverso ao de b^x, como podemos ver nas figuras abaixo:



6. Existe um número irracional denominado *número de Euler* e denotado pela letra *e*, cujo valor até a quinta casa decimal é 2,71828, que quando utilizado como base da função exponencial apresenta propriedades matemáticas muito interessantes e, por isso, a função $f(x) = e^x = exp(x)$ é a mais utilizada na teoria e nas aplicações das funções exponenciais. Dizemos que uma grandeza $Q(t)$ *cresce exponencialmente* se $Q(t) = Q_0\, e^{kt}$ para $k > 0$ e *decai exponencialmente* se $Q(t) = Q_0\, e^{kt}$ para $k < 0$, onde Q_0 representa a grandeza inicial. Seu gráfico é dado pelas figuras abaixo:



Aplicações:

1) Os biólogos observam que, em condições ideais, o número de bactérias em uma cultura cresce exponencialmente. Suponha que existam inicialmente 2.000 bactérias em certa cultura e que 6.000 bactérias estejam presentes 20 minutos depois. Quantas bactérias estarão presentes depois de 1 hora?

Solução:

Seja $Q(t)$ o número de bactérias presentes após t minutos. Como o número de bactérias cresce exponencialmente e como existiam inicialmente 2.000 bactérias, Q é uma função da forma

$$Q(t) = 2.000\ e^{kt}.$$

Como 6.000 bactérias estão presentes após 20 minutos, temos

$$6.000 = 2.000\ e^{20k} \quad \text{ou} \quad e^{20k} = 3.$$

Para determinar o número de bactérias após 1 h (60 min) basta calcular $Q(60)$ usando a lei de expoentes:

$$Q(60) = 2.000\ e^{60k} = 2.000\ (e^{20k})^3 = 2.000\ (3)^3 = 54.000.$$

Portanto, 54.000 bactérias estarão presentes após 1 hora.

2) A meia vida do elemento químico estrôncio-90 (^{90}Sr) é de 25 anos.

a) Se uma amostra de ^{90}Sr tiver uma massa de 24 mg, encontre uma expressão para a massa após t anos de desintegração.

b) Encontre a massa remanescente após 40 anos.

c) Utilizando o gráfico da função, encontre o tempo necessário para que a massa fique reduzida a 5 mg.

Solução:

a) Tomando $t = 0$ como o instante inicial, no qual se começa a analisar o fenômeno e $m(t)$ a massa num instante t qualquer, temos a seguinte situação: $m(0) = 24 \Rightarrow m(t) = ?$

Se a meia vida do elemento é de 25 anos, sabemos que a cada 25 anos sua massa se reduz à metade, ou seja,

$$m(25) = \frac{1}{2}m(0) = \frac{1}{2}24\,; \quad m(50) = \frac{1}{2}m(25) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}24 = \frac{1}{2^2}24$$

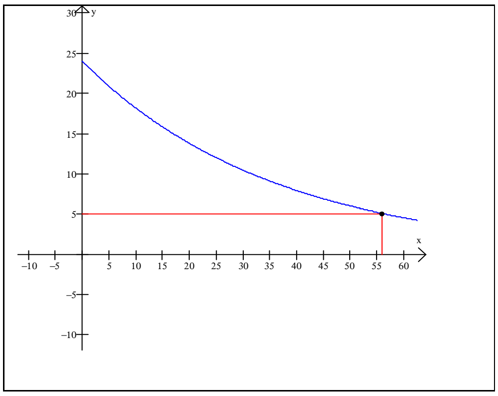
$$m(75) = \frac{1}{2}m(50) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^2}24 = \frac{1}{2^3}24\,; \quad m(100) = \frac{1}{2}m(50) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^3}24 = \frac{1}{2^4}24$$

$\vdots$

$$m(t) = \frac{1}{2^{t/25}}24 \Rightarrow m(t) = 24 \times 2^{-t/25}$$

b) $m(40) = 24 \times 2^{-40/25} = 7{,}92$ mg.

c)



Portanto, levará aproximadamente 56 anos para que sua massa fique reduzida a 5 mg.

7. Suponha que você aplique R$ 5.000,00 a uma taxa de 0,8% ao mês, cujos juros são compostos mensalmente. Quanto você terá após 4 anos?

Solução: Façamos inicialmente o caso geral, ou seja, suponhamos que a quantia inicial a ser aplicada seja C_0, a taxa seja r % ao mês e o tempo (medido em meses), t. Assim, teremos:

$t = 0 : C_0$

$t = 1 : C_0 + r\,C_0 = C_0\,(1+r)$

$t = 2 : C_0\,(1+r) + r\,C_0\,(1+r) = C_0\,(1+r)\,(1+r) = C_0\,(1+r)^2$

$t = 3 : C_0\,(1+r)^2 + r\,C_0\,(1+r)^2 = C_0\,(1+r)^2\,(1+r) = C_0\,(1+r)^3$

$\vdots$

$t = t : C_0\,(1+r)^t$

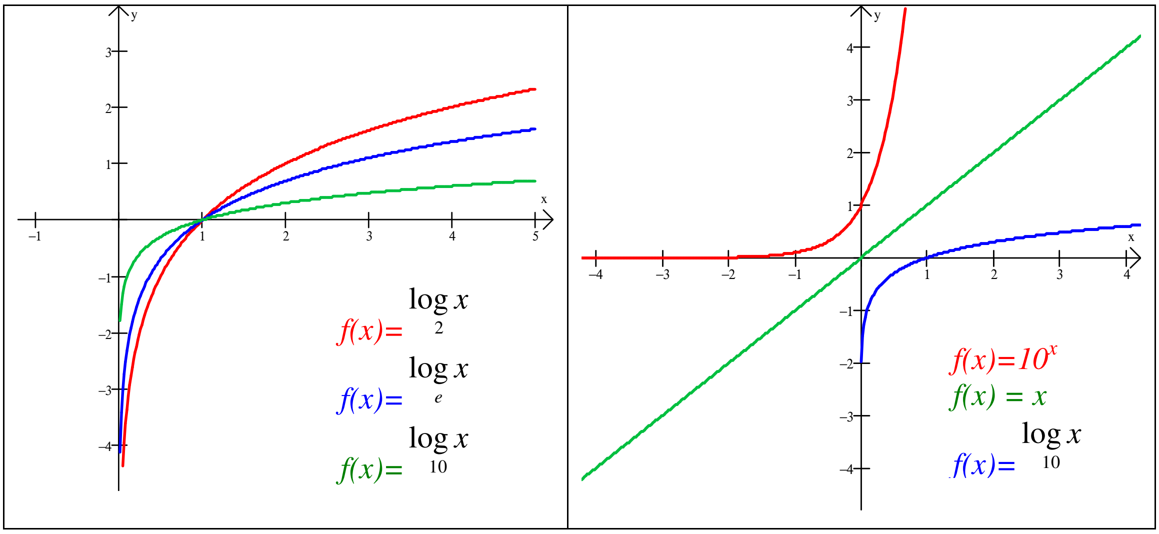
Logo, após t meses, o capital será de $C(t) = C_0\,(1+r)^t$.

Portanto, no caso exemplificado, temos $C_0 = 5000$, $r = 0{,}008$ e $t = 48$. Assim, após 4 anos você terá $5000 \times 1{,}008^{48} = 7.329{,}52$ reais.

2.10 Funções Logarítmicas: Se $a > 0$, $a \neq 1$, então a função exponencial $f(x) = a^x$ é bijetora (sempre crescente ou decrescente) e, portanto, inversível. Assim, existe uma função inversa f^{-1}, denominada *função logarítmica de base a*, denotada por $f^{-1}(x) = \log_a x$, que, por ser a função inversa, satisfaz

$$y = f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y), \text{ ou seja, } \log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x.$$

As figuras abaixo mostram a função logarítmica para várias bases e sua relação com a inversa, a exponencial.



Observações:

1) Como a^y é sempre positivo, segue que o domínio da função logarítmica é apenas o conjunto dos reais positivos.

2) Como a função logarítmica é a inversa da exponencial, segue que

$$\log_a(a^x) = x, \forall x \in R \quad \text{e} \quad a^{\log_a x} = x, \forall x > 0.$$

3) São válidas todas as propriedades de logaritmos, ou seja:

a) $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$

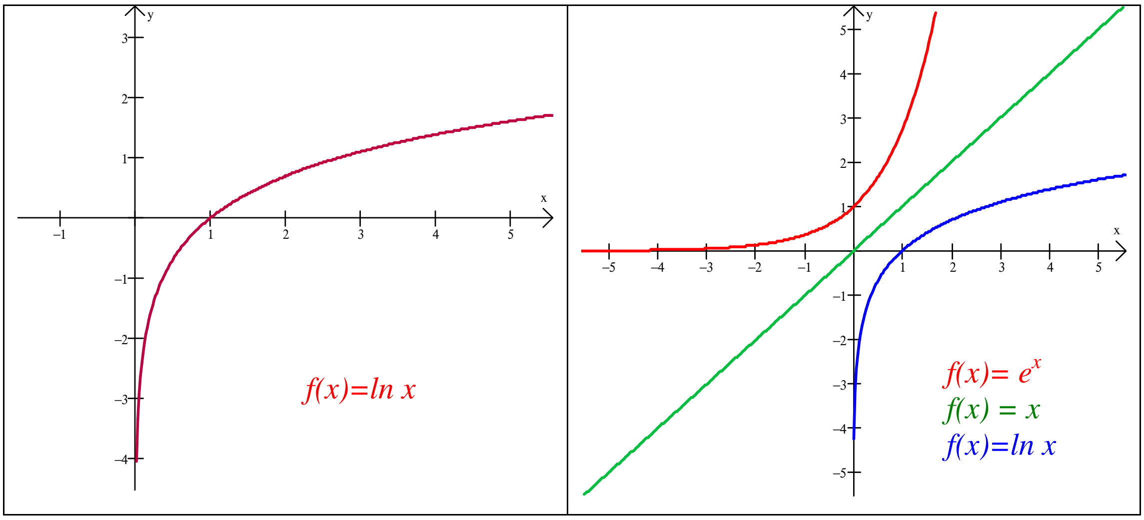
d) $r \log_a x = \log_a x^r$

b) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

c) $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$

e) $\log_a 1 = 0,\ \forall a > 0,\ a \neq 1$

Caso particular: Se $a = e$ então a função é dita *função logarítmica natural*, ou simplesmente ln, a qual é representada por $f(x) = \ln x = \log_e x$ e cujo gráfico é mostrado na figura abaixo, juntamente com a sua relação com a inversa, a exponencial.



Observações:

1) A função $f(x) = \ln(x)$ é a inversa da função $f(x) = e^x$ e, portanto, vale:

$\ln(e^x) = x$ e $e^{\ln x} = x$.

2) $\ln e = 1$ e $\ln 1 = 0$.

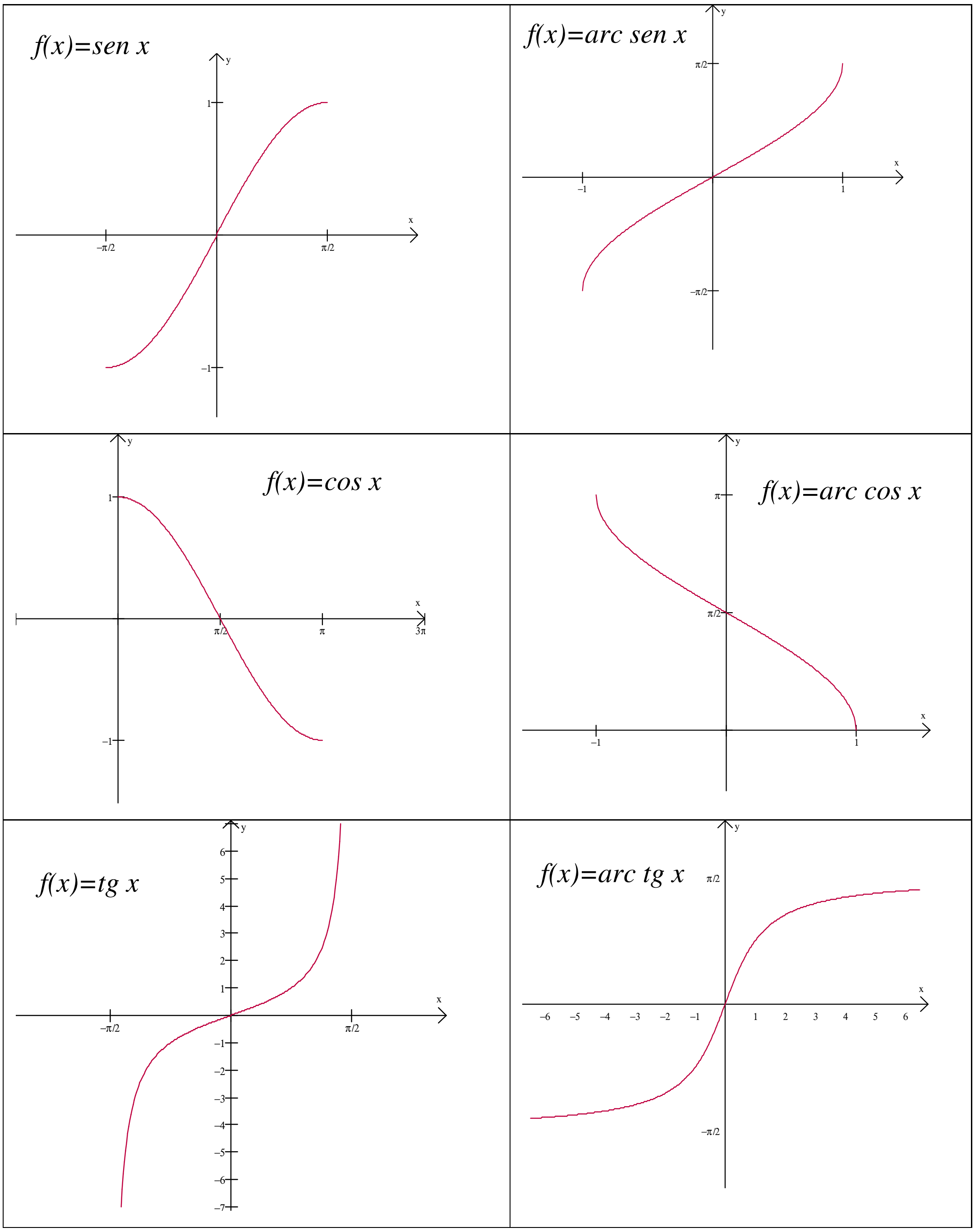
3) $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},\ \forall a > 0,\ a \neq 1$.

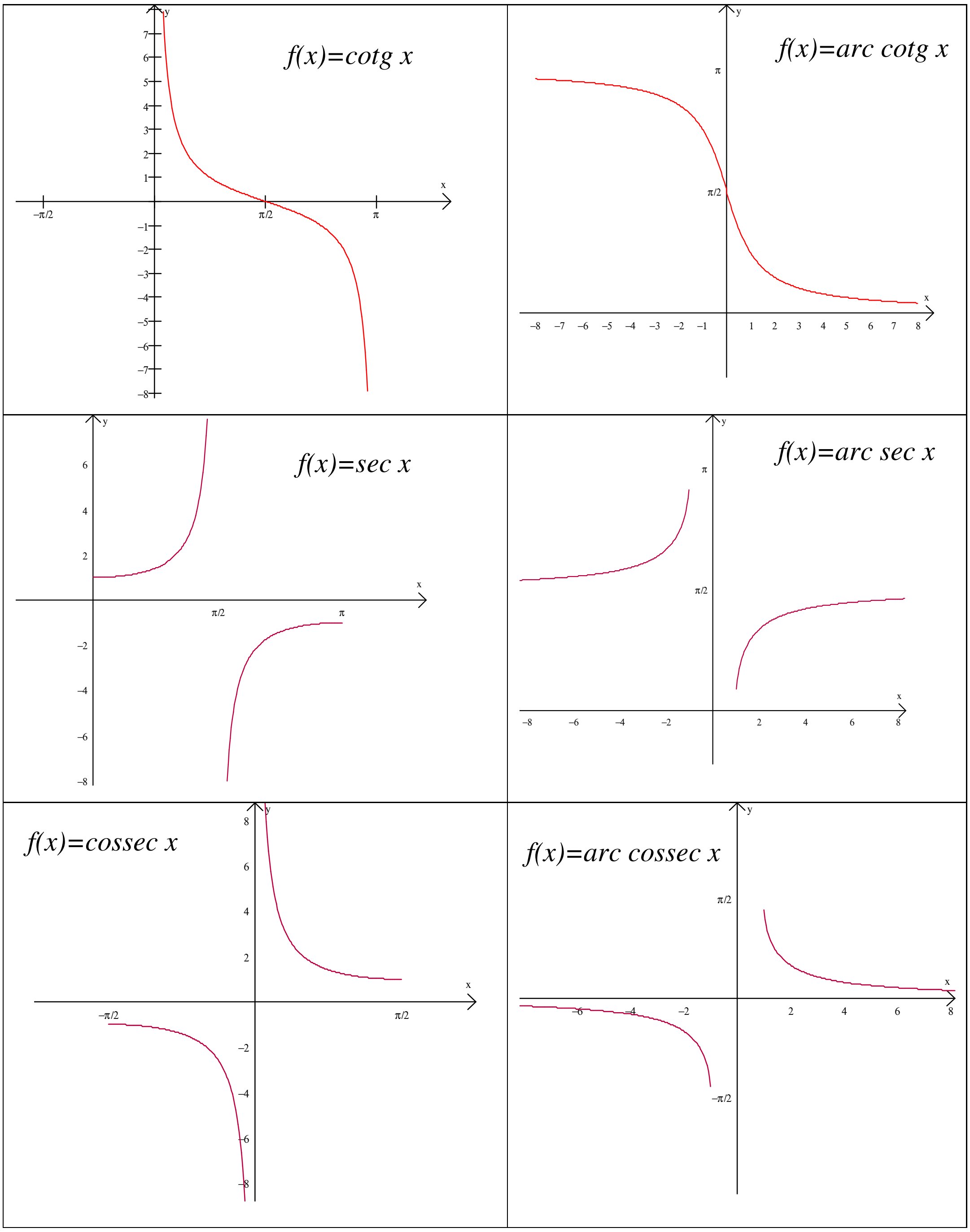
4) Na aplicação 1) vista anteriormente, poderíamos ter resolvido a equação $e^{20k} = 3$ aplicando a função inversa ln nos dois lados da equação, ou seja: $\ln(e^{20k}) = \ln 3$ ou $20k = 1{,}0986$ ou $k = 0{,}05493$.

Uma vez encontrado o valor de k, teríamos $Q(t) = 2.000\ e^{0{,}05493\,t}$ e conseqüentemente,

$$Q(60) = 2.000\ e^{0{,}05493 \times 60} = 54.000.$$

2.11 Funções trigonométricas inversas: são funções que seguem o mesmo princípio de todas as outras inversas, ou seja, desfaz o que a respectiva função fez. Como as funções trigonométricas não são bijetoras em seus domínios, é necessário restringi-los a intervalos onde a função seja bijetora. Esta restrição é arbitrária, porém é mais comum tomarmos os intervalos mais próximos da origem para definirmos as inversas das trigonométricas. Segue abaixo os gráficos das funções trigonométricas com os domínios restritos e o de suas respectivas inversas.





Observe a relação entre os domínios e as imagens das funções acima e suas inversas:

$$f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1] \qquad\qquad f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

$$x \mapsto \text{sen}(x) \qquad\qquad x \mapsto \text{arcsen}(x)$$

$$\begin{aligned} f: [0, \pi] &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f^{-1}: [-1, 1] &\to [0, \pi] \\ x &\mapsto \arccos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f: (-\pi/2, \pi/2) &\to (-\infty, +\infty) \\ x &\mapsto tg(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f^{-1}: (-\infty, +\infty) &\to (-\pi/2, \pi/2) \\ x &\mapsto arc\, tg(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f: (0, \pi) &\to (-\infty, +\infty) \\ x &\mapsto \cot g(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f^{-1}: (-\infty, +\infty) &\to (0, \pi) \\ x &\mapsto arc\cot g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f: [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi] &\to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ x &\mapsto \sec(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f^{-1}: (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) &\to [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi] \\ x &\mapsto arc\sec(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f: [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2] &\to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ x &\mapsto \cos\sec(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f^{-1}: (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) &\to [\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2] \\ x &\mapsto \arccos\sec(x) \end{aligned}$$

As funções trigonométricas inversas são utilizadas, dentre outras coisas, para a determinação de soluções de equações que envolvem funções trigonométricas. Vejamos alguns exemplos:

Resolva as equações abaixo:

a) $sen(x) - 1/2 = 0$

$sen(x) = 1/2 \Leftrightarrow x = arcsen(1/2) \Leftrightarrow x = \pi/6 \quad ou \quad x = 5\pi/6$

b) $arctg(x + 1/3) + 3\pi/4 = \pi$

$arctg(x + 1/3) = \pi/4 \Leftrightarrow x + 1/3 = tg(\pi/4) \Leftrightarrow x + 1/3 = 1 \Leftrightarrow x = 2/3$

c) $\sec(\theta) = x/a \Rightarrow \theta = arc\sec(x/a)$

EXERCÍCIOS

1) Determine o domínio das seguintes funções e faça os respectivos gráficos usando o *winplot*:

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 6$ (b) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2 + x - 2}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ (d) $f(x) = \ln(x-2)$

(e) $f(x) = e^{\sqrt{x^2-4}}$ (f) $f(x) = 3^{2x+1}$

(g) $f(x) = sen(\pi - 5)$ (h) $f(x) = arctg(x^2 - 9)$

(i) $f(x) = \arccos((\pi/2)x + 1)$ (j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}{\ln(e^{x^3-8})}$

2) Determine a funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ e faça seus gráficos, em um mesmo sistema de eixos:

(a) $f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = 1 - x$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}, \quad g(x) = x + 2$

(c) $f(x) = \sqrt{1-x}, \quad g(x) = 2x + 4$

(d) $f(x) = e^x \ , \quad g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10}}$

(e) $f(x) = tg(x + \pi), \quad g(x) = x - \pi$

(f) $f(x) = \sec(x), \quad g(x) = x^2$

(g) $f(x) = \dfrac{x + \ln x}{\sqrt{e^x}}, \quad g(x) = |x|$

3) Determine as funções $h(x)$ e $g(x)$ tais que $f(x) = g(h(x))$.

(a) $f(x) = (x^2 + 3x + 4)^5$

(b) $f(x) = (3x+1)^2 + \dfrac{5}{2(3x+1)^3}$

(c) $f(x) = \cot g^3 x$

4) (a) Determine $f(x-2)$ se $f(x) = x^2 - x + 4$.

(b) Determine $f(x^2+1)$ se $f(x) = \sqrt{x} + 2/(x-1)$.

(c) Determine $f(x+1) - f(x)$ se $f(x) = x^2$.

5) Faça o gráfico de *f(x) = sen(x)/x*. O que acontece com os valores da função para *x* próximo da origem?

6) Faça o gráfico de *f(x) = sen(x)* e *g(x) = x* no mesmo sistema de eixos coordenados. O que acontece com os valores da função para *x* próximos da origem?

7) Faça o gráfico de *f(x) = [cos(x) -1]/x*. O que acontece com os valores da função para *x* próximos da origem?

8) Faça o gráfico das seguintes funções, no mesmo sistema de eixos coordenados:

(a) $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x + \pi/2)$, $h(x) = \cos(x - \pi/2)$

(b) $f(x) = x^2$, $g(x) = 4x^2$, $h(x) = \dfrac{1}{4}x^2$

(c) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(x+2)$, $h(x) = \ln x + 2$

9) As curvas com equações $y = \dfrac{|x|}{\sqrt{a - x^2}}$ são chamadas curvas ponta de bala. Faça o gráfico de algumas destas curvas (para alguns valores de *a*) para entender o porquê de seu nome.

10) Determine uma janela retangular apropriada para a função dada e use-a para fazer o gráfico da função:

a. $f(x) = \sqrt[4]{256 - x^2}$

b. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 25}$

c. $f(x) = \cos(100x)$

d. $f(x) = 3\,sen(120x)$

e. $f(x) = 3^{\cos(x^2)}$

f. $f(x) = 2x - |x^2 - 25|$

11) Faça o gráfico da elipse $4x^2 + 2y^2 = 1$ através dos gráficos das funções que são a metade superior e inferior da elipse.

12) Use um gráfico para mostrar que a equação cos x = 0,3 x tem três soluções e encontre-as com duas casas decimais de precisão.

13) Compare as funções $f(x) = 2^x \quad e \quad g(x) = x^5$ através de seus gráficos nas seguintes janelas retangulares: [0,5] por [0,20]; [0,25] por [0,10^7]; [0,50] por [0,10^8].

14) Compare as funções $f(x) = x^5 \quad e \quad g(x) = 5^x$ por meio de seus gráficos em várias janelas retangulares. Encontre todas as intersecções dos gráficos corretas até uma casa decimal. Para grandes valores de x, qual função cresce mais rapidamente?

15) O valor de mercado de qualquer modelo de calculadora tende a diminuir com o tempo por causa do lançamento de modelos mais modernos. Suponha que daqui a x meses, o preço de um certo modelo seja dado por $P(x) = 40 + 30/(x+1)$ reais.

a. Qual será o preço daqui a 5 meses?
b. De quanto será a queda no preço durante o quinto mês?
c. Daqui a quanto tempo a calculadora custará R$ 43,00?
d. O que acontece como o preço "ao longo prazo" (ou seja, para grandes valores de x)?

16) Um estudo ambiental realizado em um certo município revela que a concentração média de poluentes no ar será $Q(p) = \sqrt{0{,}5p + 19{,}4}$ unidades quando o município tiver p mil habitantes.Calcula-se que daqui a t anos a população terá $p(t) = 8 + 0{,}2\,t^2$ mil habitantes.

a. Expresse a concentração de poluentes no ar como função do tempo.
b. Qual será a concentração de poluentes daqui a três anos?
c. Daqui a quanto tempo a concentração de poluentes atingirá o valor de 5 unidades?

17) Uma fábrica pode produzir estantes a um custo de R$ 80,00 a unidade. Os analistas da empresa estimam que se as estantes forem vendidas por x reais à unidade, aproximadamente 100 – x

unidades serão vendidas por mês. Expresse o lucro mensal do fabricante em função do preço de venda *x*, desenhe o gráfico relacionado e estime o preço ótimo de venda.

18) Suponha que você tenha R$ 20.000,00 e queira comprar um apartamento que custa R$ 50.000,00. Se você conseguir uma aplicação que renda 1,2% ao mês, quanto tempo você terá que esperar para comprá-lo?

19) Uma substância radioativa decai exponencialmente. Se 500 g da substância estavam presentes inicialmente e 400 g estão presentes 50 anos depois, quantos gramas estarão presentes após 200 anos? Quanto tempo será necessário para que se tenha 300 g da substância?

20) Um aluno que está estudando o crescimento de colônias de bactérias em certo meio de cultura obteve os seguintes dados:

Número de minutos	0	20
Número de bactérias	6.000	9.000

Use esses dados para chegar a uma função exponencial da forma $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ que expresse o número de bactérias na colônia em função do tempo. Quanto tempo levará para que as bactérias se tripliquem?

21) O iodo radioativo ^{133}I tem uma meia-vida de 20,9 horas. Quando injetado na corrente sanguínea, o iodo tende a se acumular na glândula tireóide.

a. Depois de 24h um técnico examina a glândula tireóide do paciente para verificar se está funcionando normalmente. Se a tireóide absorveu todo o iodo injetado, que porcentagem da massa inicial de iodo radioativo deve ser detectada?

b. Um paciente volta à clínica 25h depois de receber uma injeção de ^{133}I. O técnico examina a glândula tireóide e detecta a presença de 41,3% da massa de iodo que foi injetada. Qual a porcentagem da massa inicial que permanece no resto do corpo do paciente ou que foi eliminada?

22) Em um experimento para testar a memória de curto prazo, L.R.Peterson e M.J.Peterson observaram que a probabilidade $p(t)$ de que um indivíduo consiga se lembrar de uma lista de números e letras *t* segundos depois de examiná-la é dada por

$$p(t) = 0{,}89\,[0{,}01 + 0{,}99(0{,}85)^t\,].$$

a. Qual a probabilidade de que o indivíduo se lembre da lista imediatamente após examiná-la (isto é, no instante t = 0)?

b. Quanto tempo é necessário para que a probabilidade se reduza a 0,5?

c. Faça o gráfico de $p(t)$.

23) Na escala Richter, a violência de um terremoto de intensidade I é dada por $R = \ln I / \ln 10$.

a. Determine a intensidade do terremoto de 1908 em São Francisco, que atingiu 8,3 na escala Richter.

b. Quantas vezes mais intenso foi o terremoto de 1908 em São Francisco que o terremoto de 1995 em Kobe, no Japão, que atingiu 7,1 na escala Richter?

24) Um modelo razoável para o número de horas do dia com luz solar na Filadélfia *t* dias após 1º de janeiro é dado pela função

$$L(t) = 12 + 2{,}8\ sen\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right].$$

Baseado neste modelo estime quantas horas de luz solar haverá no local no início da primavera, ou seja, no dia 21 de março. Faça um gráfico da função e, baseado nele, estime qual é o dia mais ensolarado da Filadélfia.

25) Após acionado o *flash* de uma câmara, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do *flash*, o qual armazena uma carga elétrica dada por

$$Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-t/a}\right).$$

A capacidade máxima de carga é Q_0, *a* é uma constante e *t* é medido em segundos. Determine a função inversa e explique seu significado. Quanto tempo levará para o capacitor carregar 90% da capacidade se *a* = 2?