6. Aplicações da Derivada

6.1 Retas tangentes e normais - exemplos

Encontre a equação da reta tangente e da normal ao gráfico de $f(x) = e^x$, em $x = 0$. Represente geometricamente.

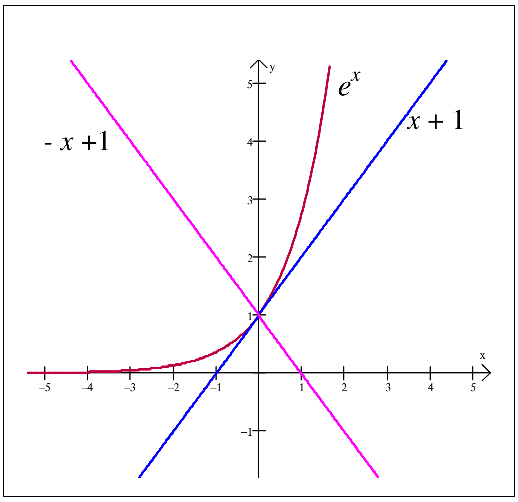
Solução:

Sabemos que a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é dada por

$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, ou equivalentemente, $y = f'(0)\,x + 1$, pois $f(0) = e^0 = 1$.

Para calcularmos $f'(0)$, primeiramente calculamos $f'(x)$ e depois substituímos x por 0. Assim, temos $f'(x) = e^x$ e, portanto, $f'(0) = e^0 = 1$. Logo, a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é dada por $y = x + 1$.

A reta normal ao gráfico de f em $x = 1$ tem seu coeficiente angular dado por $-1/f'(0) = -1$. Portanto, sua equação é dada por $y = -x + 1$.



6.1.2 Dada $f(x) = 1 + 2\cos(x)$, determine:

a. As coordenadas-x de todos os pontos do gráfico em que a reta tangente é perpendicular à reta

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 4.$$

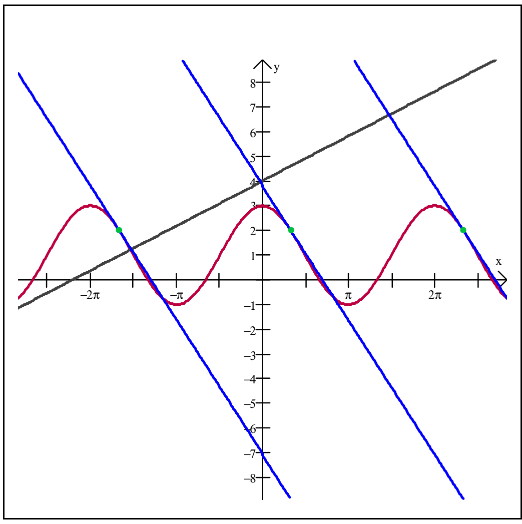
b. A equação da reta tangente ao gráfico no ponto em que este corta o eixo-y.

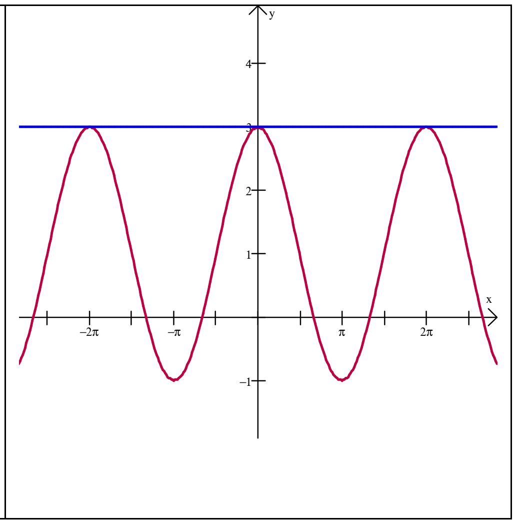
Solução:

a. Seja m_t o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f e m_n o coeficiente angular de sua reta normal. Sabemos que $m_t = -1/m_n$. Como $m_n = 1/\sqrt{3}$, segue que $m_t = -\sqrt{3}$. Por outro lado, o coeficiente angular da reta tangente em cada ponto x é dado por $f'(x)$. Portanto, queremos encontrar todos os valores de x tais que $f'(x) = -\sqrt{3}$, ou seja, todos os valores de x tais que $-2 \operatorname{sen}(x) = -\sqrt{3}$ ou $\operatorname{sen}(x) = \sqrt{3}/2$ ou $x = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{3}/2)$.

Logo, S = $\{x \in \Re : x = (\pi/3) + 2k\pi,\ k \in Z\} \cup \{x \in \Re : x = (2\pi/3) + 2k\pi,\ k \in Z\}$.

b. O gráfico corta o eixo-y quando $x = 0$. Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f neste ponto será dada por $y - f(0) = f'(0)(x-0)$ ou $y - 3 = 0.x = 0$, ou seja, $y = 3$.





6.2 Taxa de variação - exemplos

6.2.1. Sabendo que a área de um quadrado é função de seu lado, determine:

a. A variação média da área de um quadrado, em relação ao lado, quando este varia de 2,5 a 3,0 m;

b. A taxa de variação da área, em relação ao lado, quando este mede 4 m.

Solução: Sejam A a área do quadrado e x seu lado. Sabemos que $A = x^2$.

(a) A variação média de A em relação a x, quando x varia de 2,5 m a 3 m é dada por

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{A(3) - A(2{,}5)}{3 - 2{,}5} = \frac{9 - 6{,}25}{0{,}5} = \frac{2{,}75}{0{,}5} = 5{,}5.$$

(b) A taxa de variação da área em relação ao lado é dada por $\frac{dA}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = 2x$.

Portanto, quando $x = 4$, temos $\frac{dA(4)}{dx} = 2 \times 4 = 8$ *ou* $\left.\frac{dA}{dx}\right|_{(x=4)} = 8$.

Assim, quando x = 4m, a taxa de variação da área do quadrado será de 8 m^2 para cada metro que varia no comprimento do lado.

6.2.2 Uma cidade X é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é dado, aproximadamente, por

$f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}$.

(a) Qual a taxa da expansão da epidemia após 4 dias?

(b) Qual a taxa da expansão da epidemia após 8 dias?

(c) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no 5º dia?

Solução: A taxa com que a epidemia se propaga é dada pela variação da função $f(t)$ em relação a t. Portanto, para um tempo t qualquer, essa taxa é dada por $f'(t) = 64 - t^2$. Assim:

(a) No tempo $t = 4$, temos $f'(4) = 64 - 16 = 48$, ou seja, após 4 dias a moléstia estará se alastrando à razão de 48 pessoas por dia.

(b) No tempo $t = 8$, temos $f'(8) = 64 - 64 = 0$, ou seja, após 8 dias a epidemia está totalmente controlada.

(c) Como o tempo foi contado em dias, a partir do 1º dia de epidemia, o 5º dia corresponde à variação de t de 4 para 5. O número de pessoas atingidas pela moléstia durante o quinto dia será dado, então, por

$$f(5) - f(4) = \left(64.5 - \frac{5^3}{3}\right) - \left(64.4 - \frac{4^3}{3}\right) = 320 - \frac{125}{3} - 256 + \frac{64}{3} \cong 43.$$

Obs.: No item (a), vimos que no tempo $t = 4$ (início do 5º dia), a epidemia se alastra a uma taxa de 48 pessoas por dia. No item (c), calculamos que durante o 5º dia, 43 pessoas serão atingidas. Essa diferença ocorreu porque a taxa de propagação da moléstia se modificou no decorrer do dia.

6.2.3 Os pinípedes são uma sub-ordem dos mamíferos carnívoros aquáticos, tais como focas e morsas, cujos pés evoluem para nadadeiras. A relação comprimento/peso durante o crescimento fetal é dada por $P = (6\times10^{-5})\, C^{2,74}$, onde C é o comprimento (em cm) e P é o peso (em Kg).

a. Estabeleça uma fórmula para a taxa de aumento do peso em relação ao tempo.

b. Se o peso de uma foca é 0,5 Kg e varia à razão de 0,4 Kg/mês, qual a taxa de variação de seu comprimento?

Solução:

a. $P(t) = (6\times10^{-5})\,[C(t)]^{2,74}$. Então, pela regra da cadeia, temos

$$P'(t) = P'(C)\,C'(t) = 2,74\,(6\times10^{-5})[C(t)]^{1,74}\,C'(t).$$

b. A taxa de variação do comprimento é dada por $C\,'(t)$, a qual, pelo item a., é dada por

$C'(t) = \dfrac{P'(t)}{2,74\,(6\times10^{-5})[C(t)]^{1,74}}$. Sabe-se também que $P'(t) = 0,4$ quando $P(t) = 0,5$ e que esta última informação permite determinar $C(t)$, a qual satisfaz $C^{2,74} = \dfrac{P}{(6\times10^{-5})}$, ou seja,

$$C^{2,74} = \frac{0,5}{(6\times10^{-5})} = 8333,33 \Rightarrow C = 26,97.$$

Portanto, quando $P(t) = 0,5$ e $P'(t) = 0,4$, o comprimento varia à taxa de

$$C'(t) = \frac{0,5}{2,74\,(6\times10^{-5})[26,97]^{1,74}} = 7,876 \text{ cm/mês.}$$

6.2.4 Um importador de café do Brasil estima que os consumidores locais comprarão $D(p) = 4.374/p^2$ libras de café por semana quando o preço for p dólares por libra. Calcula-se também que daqui a t semanas, o preço do café brasileiro será $p(t) = 0,02\,t^2 + 0,1\,t + 6$ dólares por libra. Qual será a taxa de variação da demanda semanal de café com o tempo daqui a 10 semanas? A demanda estará aumentando ou diminuindo nesta ocasião?

Solução:

A taxa de variação da demanda semanal de café em um tempo t qualquer é dada por

$D'(t) = D'(p)\ p'(t) = \dfrac{-8.748}{[p(t)]^3}(0{,}04t + 0{,}1)$. Logo, quando t = 10 temos $p(10)$ = 9 e, conseqüentemente, $D'(10) = \dfrac{-8.748}{[9]^3}(0{,}04 \times 10 + 0{,}1) = -6$.

Portanto, daqui a 10 semanas, a demanda estará diminuindo a uma taxa de 6 libras por semana.

6.3 Regra de L'Hopital

Sejam f e g funções diferenciáveis em um intervalo aberto I, exceto possivelmente, em um ponto $a \in$ I. Suponha que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em I.

(i) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

(ii) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Observação: Esta regra também é válida para limites laterais e no infinito ($x \to \infty$).

Exemplos:

6.3.1 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = 1$

6.3.2 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x \ln a}{1} = \ln a$

6.3.3 Mostre que $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Seja $L = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln L = \ln\left[\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right] = \lim\limits_{x \to \infty}\left[\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right] =$

$$\lim_{x \to \infty}\left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x+1}\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1} = 1.$$

Portanto, $\ln L = 1 \Rightarrow L = e^1 = e$. Logo, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

6.3.4 $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{3x^2-3} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{x^2}}{6x} = \frac{-1}{6}$.

6.3.5 $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^3+4x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6} = +\infty$.

6.3.6 $\displaystyle \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{4}$.

EXERCÍCIOS

1. A massa de uma cultura de bactérias viáveis tem seu crescimento representado pela função M(t) = $p_0 + 60t - 2{,}5\,t^2$ (t medido em horas e M em cm^3), sendo p_0 uma constante positiva. Calcule a velocidade de crescimento dessa cultura quando t = 6 h. O que representa o ponto onde M'(t) = 0? Faça o gráfico de M e de M' e, a partir deles, verifique o que estaria acontecendo com a massa bacteriana para os valores de t onde M'(t) < 0 e M'(t) > 0.

2. A lei de Charles para gases afirma que se a pressão permanece constante, a relação entre o volume V que um gás ocupa e sua temperatura T (em ^{o}C) é dada por $V = V_0(1+(1/273)T)$. Determine a taxa de variação de T em relação a V.

3. Determine a taxa de variação média do volume $V = 4\pi\, r^3/3$ (m^3) de uma esfera de raio r (m) em relação ao raio, para $2 \le r \le 4$. Mostre que a taxa de variação instantânea do volume da esfera em relação a seu raio é igual a área da superfície da esfera.

4. Quando um certo produto é vendido por p reais a unidade, os consumidores compram $D(p) = \dfrac{40.000}{p}$ unidades do produto por mês. Calcula-se que daqui a t meses, o preço do produto será $p(t) = 0{,}4\ t^{3/2} + 6{,}8$ reais por unidade. Qual será a taxa de variação da demanda mensal do produto (em relação ao tempo) daqui a quatro meses?

5. Estima-se que daqui a t anos a população de um certo município seja de $p(t) = 20 - 6/(t\text{-}1)$ habitantes. Um estudo ambiental revela que a concentração média de monóxido de carbono no ar será de $c(p) = 0{,}5\sqrt{p^2 + p + 58}$ partes por milhão, onde p é a população em milhares de habitantes. Determine a taxa de variação da concentração de monóxido de carbono em relação ao tempo daqui a 2 anos.

6. Uma equação de movimento da forma $s(t) = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ representa uma oscilação amortecida de um objeto. Encontre a velocidade e a aceleração do objeto.

7. Um copo de papel tem a forma de um cone com 10 cm de altura e 3 cm de raio (no topo). Se for colocada água dentro do copo a uma taxa de 2 cm^3/s, com que rapidez o nível da água se elevará quando ela tiver 5 cm de profundidade ?

8. Uma pedra atirada verticalmente para cima com velocidade de 24 m/s atinge uma altura de $h = 24\,t - 0{,}8\,t^2$ metros em t segundos.

(a) Determine a velocidade e a aceleração da pedra no instante t.

(b) Qual a altura máxima atingida pela pedra?

(c) Qual a velocidade da pedra quando ela está a 55 m do solo na subida? E na descida?

(d) Quando a pedra atingirá o solo novamente?

(e) Faça o gráfico do movimento da pedra.

9. Ao ser inflado um balão esférico, seu raio r aumenta em função do tempo t. Se V é o volume do balão, estabeleça uma fórmula para a variação instantânea do volume em função do tempo.

10. Ao ser lançada no espaço uma nave espacial, o peso de um astronauta decresce até atingir um estado de imponderabilidade. O peso W de um astronauta de 150 libras a uma altitude de x quilômetros acima do nível do mar é dado por $W = 150\left(\dfrac{6400}{6400+x}\right)^2$. Se a nave se afasta da terra à razão de 6 km/s, a que taxa decresce W quando x = 1000 Km ?

11. (a) Encontre a equação das retas tangente e normal à elipse $x^2 + 2y^2 = 1$, no ponto $P\left(1/2, -\sqrt{3/8}\right)$.

(b) Determine o ponto sobre a curva dada por $y = \left[\ln(x+4)\right]^2$ onde a reta tangente é horizontal.

12. Se $f(x) = 3 + 2\,\mathrm{sen}(x)$, determine:

a. As coordenadas-x de todos os pontos do gráfico em que reta tangente é paralela à reta $y = \sqrt{2}\,x - 5$.

b. A equação da reta tangente ao gráfico no ponto $x = \pi/6$.

c. Faça os gráficos de a. e b.

13. Determine a equação das retas tangente e normal às curvas das funções nos pontos indicados:

a. $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$; $x = 0$.

b. $f(x) = x^3 - 1$; $x = 2$.

c. $f(x) = 1/x^2$; $x = 4$.

14. Calcule os limites abaixo, usando a regra de L'Hopital:

a. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^2}$

e. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2+5x+4}{x^2+2x+1}$

f. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}$