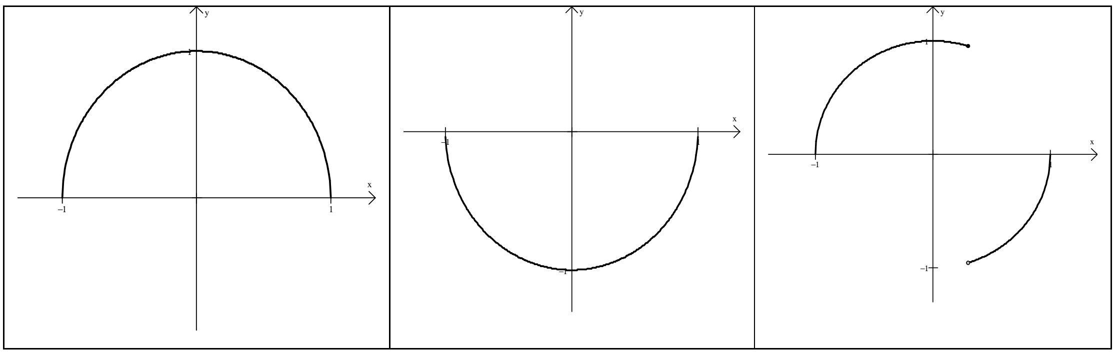
7. Diferenciação Implícita

Sempre que temos uma função escrita na forma $\boldsymbol{y = f(x)}$, dizemos que y é uma **função explícita** de x, pois podemos isolar a variável dependente de um lado e a expressão da função do outro. Porém nem sempre isso é possível ou conveniente e, caso isso ocorra, dizemos que y é uma **função implícita** de x. Vejamos, por exemplo, a equação $y = 2x^2 - 3$. Observamos que y é uma função explícita de x, pois podemos escrever $y = f(x)$, onde $f(x) = 2x^2 - 3$. Entretanto, a equação $4x^2 - 2y = 6$ define a mesma função, pois isolando y obtemos $y = 2x^2 - 3$. Quando escrita na forma $4x^2 - 2y = 6$, dizemos que y é uma função implícita de x.

Observação: É necessário tomar cuidado, pois muitas vezes uma equação em x e y pode definir mais de uma função implícita.

Exemplo: A equação $x^2 + y^2 = 1$ pode definir várias funções implícitas, tais como $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = -\sqrt{1-x^2}$, $y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \le x \le 0{,}3 \\ -\sqrt{1-x^2}, & 0{,}3 < x \le 1 \end{cases}$, dentre outras. Vejamos os seus gráficos:



Derivação: Para derivar uma função dada na forma implícita, basta lembrar que y é função de x e usar a regra da cadeia.

Exemplos:

a) Dada a equação $4x^2 - 2y = 6$, determine $y'(x)$.

Para não esquecermos que y é função de x, podemos escrever a equação como $4x^2 - 2y(x) = 6$. Assim, derivando ambos os lados em relação à x, obtemos $8x - 2\,y'(x) = 0$ ou $y'(x) = 4x$, que coincide com a derivada de $y = 2x^2 - 3$.

b) Faça o mesmo para $x^2 y + 2y^3 = 3x + 2y$ ou $x^2 y(x) + 2[y(x)]^3 = 3x + 2y(x)$

Derivando ambos os lados em relação à x, temos:

$2x\, y(x) + x^2\, y'(x) + 6[y(x)]^2\, y'(x) = 3 + 2\, y'(x)$

$y'(x)\, [x^2 + 6[y(x)]^2 - 2] = 3 - 2x\, y(x) \Rightarrow y'(x) = \dfrac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2 - 2}$

c) Mostre que a reta tangente à circunferência dada por $x^2 + y^2 = r^2$, em um ponto qualquer sobre ela, é perpendicular à reta que passa por este ponto e a origem (reta que contém o raio neste ponto).

Solução:

Seja (x_1, y_1) um ponto qualquer sobre a circunferência. Como o coeficiente angular da reta tangente é dado pela derivada da função no ponto, então, derivando a equação da circunferência em relação à x, temos:

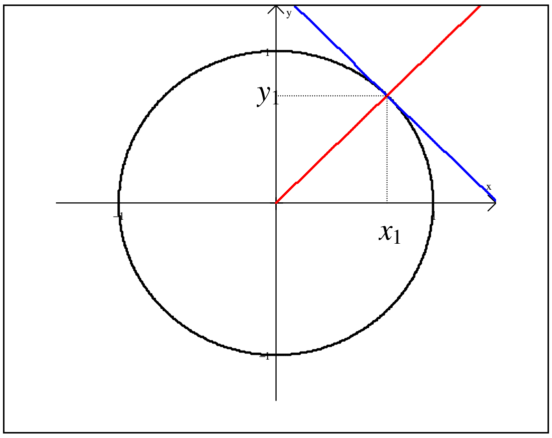
$2x + 2y\, y'(x) = 0$, o que é equivalente à $y'(x) = \dfrac{-2x}{2y} = \dfrac{-x}{y}$.

Assim, o coeficiente angular da reta tangente à circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ no ponto (x_1, y_1) é dado por $m_t = -x_1 / y_1$.

Por outro lado, geometricamente é fácil ver que o coeficiente angular da reta que contém o raio passando por (x_1, y_1), é dado por $m_r = y_1 / x_1$.

Assim, fazendo o produto, temos:

$m_t \times m_r = \dfrac{-x_1}{y_1} \times \dfrac{y_1}{x_1} = -1$, o que implica que a reta que contém o raio passando por (x_1, y_1) é perpendicular à reta tangente à curva neste ponto. Como tomamos um ponto qualquer sobre a circunferência, o resultado vale para todos os pontos sobre ela. Vejamos o gráfico:



d) Utilize derivação implícita para mostrar que se $y = \text{arc } sen\, x$, então $y\,'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solução:

Sabemos que $y = \text{arc } sen\, x \iff sen\, y = x$. Assim, derivando a última equação em relação à x, obtemos:

$\cos y \times y\,'(x) = 1$, ou $y\,'(x) = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-sen^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Portanto, $y\,'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

e) Quando o preço unitário de um certo produto é p reais, o fabricante tem interesse em produzir x mil unidades, onde a oferta e o preço estão relacionados pela equação:

$$x^2 - 2x\sqrt{p} - p^2 = 31.$$

Qual é a taxa de variação da oferta quando o preço unitário é R$ 9,00 e está aumentando à taxa de 20 centavos por semana?

Solução:

Sabemos que para $p = 9$, $dp/dt = 0{,}20$. Queremos saber qual o valor de dx/dt.

Inicialmente observamos que para $p = 9$, temos:

$$x^2 - 2x\sqrt{9} - 9^2 = 31 \iff x^2 - 6x - 112 = 0 \iff (x+8)(x-14) = 0 \iff x = 14,$$

já que $x = -8$ não tem significado físico para o problema.

Agora, derivando implicitamente os dois membros da equação de oferta em relação ao tempo, obtemos:

$$2x\frac{dx}{dt} - 2\left[\frac{dx}{dt}\sqrt{p} + x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\right] - 2p\frac{dp}{dt} = 0.$$

Fazendo $x = 14$, $p = 9$ e $dp/dt = 0{,}20$ nesta equação, obtemos

$$2(14)\frac{dx}{dt} - 2\frac{dx}{dt}\sqrt{9} - (14)\frac{1}{\sqrt{9}}(0{,}20) - 2\,(9)\,(0{,}20) = 0.$$

Isolando dx/dt e fazendo os cálculos necessários, encontramos $\dfrac{dx}{dt} = 0{,}206$.

Como a oferta é dada em milhares de unidades, concluímos que a oferta está aumentando à taxa de 206 unidades por semana.

EXERCÍCIOS

1) Calcule *dy/dx* por derivação implícita:

a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $x^3 + y^3 = xy$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ d) $(2x + y)^3 = x$

e) $5x - x^2 y^3 = 2y$ f) $\ln y + tg\ x = xy^2$

2) Determine a equação das retas tangente e normal à curva dada, no ponto especificado. Usando um programa gráfico, construa os gráficos da curva, das duas retas e marque o ponto *P*, no mesmo sistema de eixos.

a) $x^2 = y^3; \quad P(8,4)$ b) $xy = 2; \quad P(2,1)$

c) $x^2 y^3 - 2xy = 6x + y + 1; \quad P(0,-1)$ d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2; \quad P(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

3) Mostre, utilizando derivação implícita, que se $y = \text{arc cos } x$, então $y'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

4) Quando o preço unitário de um certo produto é *p* reais, a demanda é de *x* centenas de unidades, onde $x^2 + 3px + p^2 = 79$. Qual é a taxa de variação da demanda com o tempo se o preço unitário é R$ 5,00 e está diminuindo à razão de 30 centavos por mês?

5) Um pequeno balão esférico é introduzido em uma artéria obstruída e inflado à razão de $0{,}002\ \pi\ mm^3 / min$. Qual é a taxa de aumento do raio do balão quando o raio é $R = 0{,}005$ mm ?

6) Um estudo ambiental realizado em certa cidade revela que haverá $Q(p) = p^2 + 4p + 900$ unidades de um perigoso poluente no ar quando a população for de p mil habitantes. Se a população atual é de 50.000 habitantes e está aumentando à taxa de 1.500 habitantes por ano, qual é a taxa de aumento da poluição causada pelo produto?

7) Nos processos adiabáticos não existe troca de calor com o ambiente. Suponha que um balão de oxigênio seja submetido a um processo adiabático. Nesse caso, se a pressão do gás é *P* e o volume é *V*, pode-se demonstrar que $PV^{1,4} = C$, onde *C* é uma constante. Em certo instante, $V = 5\ m^3$, $P = 0{,}6\ Kg/m^2$ e *P* está aumentando à razão de $0{,}23\ Kg/m^2/s$. Qual é a taxa de variação do volume neste instante? O volume está aumentando ou diminuindo?

8. Diferenciais

Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável. Já vimos que se x_1 e x_2 pertencem ao domínio da f, então a diferença $x_2 - x_1$ é chamada incremento de x e denotada por Δx. Assim, $\Delta x = x_2 - x_1$. De modo análogo, o incremento correspondente a y é dado por $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$.

***Definição*:** Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável em x_1 e seja Δx um incremento de x.

(i) A diferencial de x é dada por $dx = \Delta x$.

(ii) A diferencial de y em x_0 é dada por $dy = f'(x_0)\, dx$.

Observe que $f'(x_1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

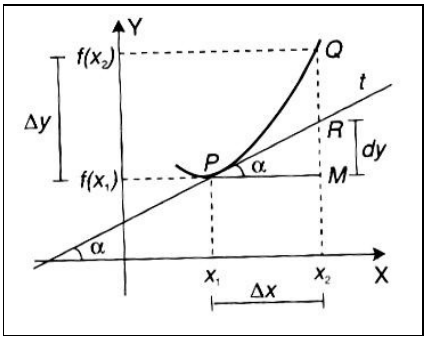
Assim, quando $\Delta x \approx 0$, $f'(x_0) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ e, conseqüentemente, $\Delta y \approx f'(x_0)\, \Delta x$, ou seja, $dy \approx \Delta y$, sempre que $\Delta x \approx 0$. Isso significa que, para pequenas variações em x, podemos usar a diferencial para avaliar a correspondente variação ocorrida em y.

Por outro lado, $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$. Logo, $dy \approx f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$, ou seja,

$$f(x_1 + dx) \approx f(x_1) + f'(x_1)\, dx \text{ , sempre que } dx = \Delta x \approx 0.$$

Esta expressão é denominada aproximação linear de f em torno de x_1, pois, como podemos observar, se $x = x_1 + dx$, então $f(x_1) + f'(x_1)\, dx = f(x_1) + f'(x_1)\,(x - x_1)$ é a expressão da reta tangente ao gráfico de f em x_1. Isso significa que em uma vizinhança muito pequena de x_1, podemos representar a função f por sua reta tangente neste ponto, ou seja, f satisfaz $f(x) \approx f(x_1) + f'(x_1)\,(x - x_1)$.

Interpretação geométrica da diferencial:



Exemplos:

1) (a) Use a diferencial para aproximar a variação de *sen* θ, quando θ varia de 60^o para 61^0.

(b) Calcule *sen* 61^0 através da aproximação linear da função seno.

Solução:

(a) Seja $y = f(\theta) = sen\ \theta$. Então, $dy = f'(\theta)\, d\theta = cos\ \theta\ d\theta$.

No problema, temos: $\theta_1 = 60^o = \dfrac{\pi}{3}$ e $d\theta = 1^o = \dfrac{\pi}{180}$.

Logo, $dy = (cos\ \dfrac{\pi}{3})\ \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}0087$.

Assim, quando θ varia de 60^o para 61^0, provoca uma variação de 0,0087 em *sen* θ.

(b) A aproximação linear para $f(\theta) = sen\ \theta$ é dada por:

$f(\theta) = f(\theta_1 + \Delta\theta) \approx f(\theta_1) + df(\theta_1) = sen\ \theta_1 + (cos\ \theta_1)\mathrm{d}\theta$. Substituindo os respectivos valores, temos:

$$sen\ 61^0 \approx sen\ \frac{\pi}{3} + (cos\ \frac{\pi}{3})\ (\frac{\pi}{180}) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}0087 \approx 0{,}8747.$$

Observação: Usando uma calculadora obtemos *sen* 61^0 = 0,8746, ou seja, um erro da ordem de 0,0001, pelo fato de que a calculadora usa uma aproximação melhor que a linear.

2) Use a diferencial para aproximar o valor de $\sqrt{50}$.

Solução: Sejam $f(x) = \sqrt{x}$, $x_1 = 49$ e $dx = 1$. Então temos:

$$f(x) = f(x_1 + \Delta x) \approx f(x_1) + df(x_1) = \sqrt{x_1} + \frac{1}{2\sqrt{x_1}}dx = 7 + \frac{1}{14} \times 1 \approx 7{,}07143.$$

Observação: Calculado por uma calculadora obtemos 7,07106.

3) Mede-se como 12 cm o raio de um balão esférico, com erro máximo de ±0,06 cm. Aproxime o erro máximo no cálculo do volume do balão.

Solução:

Sejam r a medida do raio do balão e dr a medida do erro máximo cometido na medida de r. Então, quando r = 12 cm, temos dr = ±0,06 cm. Queremos determinar o erro cometido no cálculo do volume, o qual pode ser aproximado por dV, onde $V(r) = \dfrac{4\pi\, r^3}{3}$ é o volume da esfera. Porém,

$$dV = V\,'(r\,)\, dr = 4\,\pi\, r^2\, dr = 4\,\pi\,(12)^2\,(\pm 0{,}06) \approx \pm\, 108{,}57.$$

Portanto, o erro máximo no cálculo do volume, devido a um erro na medida do raio de ±0,06 cm, será de aproximadamente ±108,57 cm^3.

Observação: Embora o erro possa parecer muito grande, uma idéia melhor dele é dada pelo **erro relativo**, que é calculado dividindo-se o erro pelo volume total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} \approx \frac{4\pi\, r^2 dr}{\dfrac{4\pi\, r^3}{3}} = 3\frac{dr}{r} = 3\frac{0{,}06}{12} \approx 3 \times 0{,}005 = 0{,}015\,.$$

Assim, um erro de 0,5% no raio provoca um erro de 1,5% no volume (para mais ou para menos).

4) Uma baleia é avistada pela tripulação de um navio, que estima seu comprimento L em 10 m, com um erro máximo possível de 60 cm. Sabe-se que o peso W (em toneladas métricas) está relacionado com L pela fórmula W = 0,005823 $L^{3{,}18}$. Use diferenciais para aproximar o erro absoluto e o erro relativo na estimativa do peso da baleia.

Solução:

dW = (3,18) (0,005823) $L^{2{,}18}$ dL. Como L = 10 e dL = 0,6, temos

dW = (3,18) (0,005823) $10^{2{,}18}$ (0,6) ≈ 1,68 tons. métricas.

Portanto, o erro absoluto é de aproximadamente 1,68 tons. métricas.

O erro relativo é dado por

$$\frac{dW}{W} = \frac{(3{,}18)(0{,}005823)L^{2{,}18}dL}{0{,}005823L^{3{,}18}} = \frac{3{,}18dL}{L} = 3{,}18\frac{0{,}6}{10} = 3{,}18 \times 0{,}06 \approx 0{,}19\,.$$

Assim, um erro de aproximadamente 6% na estimativa do comprimento acarreta um erro de aproximadamente 19% na estimativa do peso.

EXERCÍCIOS:

1) Encontre a aproximação linear das funções abaixo, nos pontos dados:

a) $f(x) = x^3, \quad x_0 = 1$

b) $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1$

c) $f(x) = e^{-2x}, \quad x_0 = 0$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = -8$

2) Use diferenciais para estimar os valores solicitados:

a) $\sqrt{36{,}1}$

b) $\dfrac{1}{10{,}1}$

c) $cos\ 59^{o}$

d) ln 1,07

3) A aresta de um cubo tem 30 cm, com um possível erro de medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível em calcular o volume do cubo e a área de sua superfície.

4) O raio de um disco circular é 24 cm, com um possível erro de 0,2 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo na área do disco. Qual o erro relativo?

5) Quando o sangue flui ao longo de um vaso sanguíneo, o fluxo F (volume de sangue passando, por unidade de tempo, por um ponto dado) é proporcional à quarta potência do raio R do vaso, ou seja, $F = kR^4$ (isso é conhecido como a Lei de Poiseuille). Uma artéria parcialmente obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angioplastia, na qual um cateter do tipo balão é inflado dentro da artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangue. Mostre que a variação relativa em F é cerca de quatro vezes a variação relativa em R. Como um aumento de 5% no raio afeta o fluxo de sangue?