1.7.2- Método de Gauss- Seidel

Suponhamos D = I, como foi feito para o método de Jacobi-Richardson.
Transformamos o sistema linear Ax = b como se segue:

$$(L^* + I + R^*)x = b^*$$

$$(L^* + I)x = - R^*x + b^*$$

$$x = - (L^* + I)^{-1} R^* x + (L^* + I)^{-1} b^*$$

O processo iterativo definido por:

$$X^{(k+1)} = - (L^* + I)^{-1}R^* x^{(k)} + (L^* + I)^{-1}b^*$$

é chamado de Gauss-Seidel.

Explicitando as componentes, usando para isso a equação do processo na forma:

$$(L^* + I)\, x^{(k+1)} = - R^*x^{(k)} + b^*$$

ou

$$X^{(k+1)} = - L^* x^{(k+1)} - R^* x^{(k)} + b^*$$

Resulta que o método de Gauss-Seidel consiste na determinação de uma sequência de aproximantes de índice k

$$x_1^{(k)} , x_2^{(k)} , \ldots , x_n^{(k)} , \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

a partir de valores iniciais

$$x_1^{(0)} , x_2^{(o)} , \ldots , x_n^{(o)}$$

através do processo iterativo definido por:

$$x_1^{(k+1)} = 0 - a_{12}^* \; x_2^{(k)} - \ldots - a_{1n}^* \; x_n^{(k)} + b_1^*$$

$$x_2^{(k+1)} = - a_{21}^* \; x_1^{(k+1)} - 0 - a_{23}^* x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}^{*(k)} \; x_n^{(k)} + b_2^*$$

$$x_3^{(k+1)} = - a_{31}^* \; x_1^{(k+1)} - a_{32}^* x_2^{(k+1)} - 0 - \ldots - a_{3n}^* \; x_n^{(k)} + b_3^*$$

. . . .

$$x_n^{(k+1)} = - a_{ni}^* \; x_1^{(k+1)} - a_{n2}^* \; x_2^{(k+1)} - a_{n3}^* x_3^{(k+1)} \ldots - 0 + b_n^* \; .$$

Vemos por estas equações que as componentes de $x^{(k+1)}$ são calculadas sucessivamente sem necessidade de se calcular $(L^* + I)^{-1}$.

Esse método difere do de Jacobi-Richardson por utilizarmos para o cálculo de uma componente de $x^{(k+1)}$ o valor mais recente das demais componentes.

1.7.2- Critério de convergência.

a) O Critério de Sassenfeld:

Aplicando o critério geral de convergência, calculemos:

$$\|B\|_\infty = \|(L^*+I)^{-1} R^*\|_\infty$$

Recordemos que: $\|B\|_\infty = \min k$.

Portanto se k satisfazer a desigualdade $\|Bx\|_\infty \leq k \|x\|_\infty$ teremos $\|B\|_\infty \leq k$.

Seja $y = Bx$

$\therefore\ y = - (L^* + I)^{-1} R^*x$

$(L^* + I)y = - R^*x$

ou

$y = - L^*y - R^*x.$

Assim o vetor y é obtido de x a partir das equações:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} y_1 = 0 - a^*_{12}x_2 - a^*_{13}x_3 - \cdots - a^*_{1n}x_n \\ y_2 = - a^*_{21}y_1 - 0 - a^*_{23}x_3 - \cdots - a^*_{2n}x_n \\ y_3 = - a^*_{31}y_1 - a^*_{31}y_2 - 0 - \cdots - a^*_{3n}x_n \\ \quad\vdots \\ y_n = - a^*_{n1}y_1 - a^*_{n2}y_2 - a^*_{n3}y_3 - \cdots - 0 \end{cases}$$

Calculemos $\|\mathbf{y}\|_\infty = \|\mathbf{Bx}\|_\infty$ como $\|\mathbf{y}\|_\infty = \max_{\mathbf{i}} \|\mathbf{y}_\mathbf{i}\|$

A partir das equações (I) conseguimos as seguintes majorações:

$$\|\mathbf{y}_1\| = \left|\sum_{j=2}^{n} \mathbf{a}^*_{1j}\mathbf{x}_j\right| \leq \sum_{j=2}^{n} |\mathbf{a}^*_{1j}|\, |\mathbf{a}_j| \leq \sum_{j=2}^{n} |\mathbf{a}^*_{1j}| \max_{j} |\mathbf{x}_j|$$

$$= \beta_1 \|\mathbf{x}\|_\infty \quad \text{onde } \beta_1 = \sum_{j=2}^{n} |\mathbf{a}^*_{1j}|$$

$$\therefore \ \|\mathbf{y}_1\| \le \beta_1 \|\mathbf{x}\|_\infty$$

$$\|\mathbf{y}_2\| = \left|\mathbf{a}^*_{21}\mathbf{y}_1 + \sum_{j=3}^{n} \mathbf{a}^*_{2j}\mathbf{x}_j\right| \le |\mathbf{a}^*_{21}|\beta_1 \|\mathbf{x}\|_\infty + \sum_{j=3}^{n} |\mathbf{a}^*_{2j}||\mathbf{x}_j|$$

$$\le |\mathbf{a}^*_{21}|\, \beta_1 \|\mathbf{x}\|_\infty + \sum_{j=3}^{n} |\mathbf{a}^*_{2j}| \max |\mathbf{x}_j| =$$

$$= |\mathbf{a}^*_{21}|\beta_1 \|\mathbf{x}\|_\infty + \sum_{j=3}^{n} |\mathbf{a}^*_{2j}|\, \|\mathbf{x}\|_\infty =$$

$$= \left(|\mathbf{a}^*_{21}|\beta_1 + \sum_{j=3}^{n} |\mathbf{a}^*_{2j}|\right) \|\mathbf{x}\|_\infty = \beta_2 \|\mathbf{x}\|_\infty$$

onde $\beta_2 = \left(|\mathbf{a}^*_{21}|\beta_1 + \sum_{j=3}^{n} |\mathbf{a}^*_{2j}|\right)$

$$\therefore \ |\mathbf{y}_2| \le \beta_2 \|\mathbf{x}\|_\infty$$

Analogamente, obtemos:

$$|\mathbf{y}_i| \le \sum_{j=1}^{i-1} |\mathbf{a}^*_{ij}|\, \beta_j \|\mathbf{x}\|_\infty + \sum_{j=i+1}^{n} |\mathbf{a}^*_{ij}|\, |\mathbf{x}_j| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{i-1} |\mathbf{a}^*_{ij}|\, \beta_j \|\mathbf{x}\|_\infty + \sum_{j=i+1}^{n} |\mathbf{a}^*_{ij}| \max_j |\mathbf{x}_j|$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{i-1} |\mathbf{a}^*_{ij}|\, \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |\mathbf{a}^*_{ij}|\right) \|\mathbf{x}\|_\infty = \beta_i \|\mathbf{x}\|_\infty$$

onde $\beta_i = \left(\sum_{j=1}^{i-1} |\mathbf{a}^*_{ij}|\, \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |\mathbf{a}^*_{ij}|\right)$

$$\therefore \ |\mathbf{y}_i| \le \beta_i \|\mathbf{x}\|_\infty \ .$$

Portanto: $\|\mathbf{Bx}\|_\infty = \|\mathbf{y}\|_\infty = \max_i |\mathbf{y}_i| \le \max_i \beta_i \|\mathbf{x}\|_\infty$

onde $\|\mathbf{B}\|_\infty \le \max_i \beta_i$.

Podemos enunciar agora o Critério de Sassenfeld:

"O método de Gauss-Seidel converge se:

$$\max_i \beta_i < 1$$

onde os β_i são calculados por recorrência através de:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |\mathbf{a}^*_{ij}|\, \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |\mathbf{a}^*_{ij}| \ ."$$

b) <u>Critério das linhas</u>

"O método de Gauss-Seidel converge se o critério das linhas for satisfeito, isto é, se:

$$\max_{i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| a^{*}_{ij} \right| < 1."$$

Para provar este critério basta verificar que a condição

$$\max_{i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| a^{*}_{ij} \right| < 1$$

implica $\beta_i < 1$ $\quad i = 1, 2, \ldots, n$.

De fato:

Para i = 1, temos:

$$b_1 = \sum_{j=2}^{n} \left| a^{*}_{ij} \right| \leq \max_{i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}} \left| a^{*}_{ij} \right| < 1 \,.$$

Suponhamos $\beta_j < 1$ para $j = 1, 2, \ldots, i - 1$.
Então

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| a^{*}_{ij} \right| b_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left| a^{*}_{ij} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} \left| a^{*}_{ij} \right| \leq \max_{i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}} \left| a^{*}_{ij} \right| < 1 \,.$$

Portanto max $\beta_i < 1$ e o critério de Sassenfeld é verificado.

Observações:

- Dado um sistema linear Ax=b pode acontecer que o método de jacobi-Richardson aplicado a ele resulte convergente enquanto que o de Gauss-Seidel resulta divergente e vice-versa.

- Se $\|B\|$ não for apreciavelmente menor que 1 a convergência pode ser bastante lenta.

- A convergência para os métodos: Jacobi-Richardson e Gauss-Seidel não depende do valor inicial $x^{(0)}$.

- Um permutação conveniente das linhas ou colunas de A antes de dividir cada equação pelo coeficiente da diagonal principal pode reduzir o valor de $\|B\|$.

Exemplo 1.7.2:

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (0,0,0)^t$ e $\varepsilon < 10^{-2}$.

Solução:

Dividindo cada equação pelo correspondente elemento da diagonal principal obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 + 0.2x_2 + 0.2\,x_3 &= 1 \\ 0.75x_1 + x_2 + 0.25x_3 &= 1.5 \\ 0.5\,x_1 + 0.5x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Temos:

$$\max_{i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|a_{ij}^{*}\right| = 1$$

Portanto, por esse critério não podemos garantir convergência. Mas aplicando o critério de Sassenfeld, temos:

$$\beta_1 = |0.2| + |0.2| = 0.4$$
$$\beta_2 = |0.75|\,(0.4) + |0.25| = 0.3 + 0.25 = 0.55$$
$$\beta_3 = |0.5|\,(0.4) + (0.5)\,(0.55) = 0.2 + 0.275 = 0.475$$
$$\therefore \max_{i} \beta_i = 0.55 < 1$$

Logo temos o critério de convergência satisfeito.
Efetuando-se as iterações definidas por:

$$x_1^{(k+1)} = -0.2x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} + 1$$

$$x_2^{(k+1)} = -0.75x_1^{(k+1)} - 0.25x_3^{(k)} + 1.5$$

$$x_3^{(k+1)} = -0.5x_1^{(k+1)} - 0.5x_2^{(k+1)}$$

a partir de $x^{(0)} = (0,0,0)^t$, resultam os seguintes valores:

K	0	1	2	3	4
x_1	0	1	1.025	1.0075	1.001625
x_2	0	0.75	0.95	0.99125	0.998625
x_3	0	-0.875	-0.9875	-0.999375	-1.000125

Observações:

- Para e < 10^{-2} temos que a solução do sistema é
  $x = (1.00 ; 0.99 ; -1.00)^t$
- A solução exata do sistema proposto é $x = (1, 1, -1)^t$.

1.7.3- <u>Exercícios:</u>

1.7.3.1) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 10 \\ x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & = & 11 \end{cases}$$

pelo método de Jacobi-Richardson com $x^{(0)} = (0,0,0)^t$ e $\varepsilon < 10^{-3}$.

1.7.3.2) Dado o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ x_1 & + & 10x_2 & + & 8x_3 & = & 20 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 20 \end{cases}$$

a) Verificar a possibilidade de aplicação do método iterativo de jacobi-Richardson.
b) Se possível, resolvê-lo pelo método do item a).

1.7.3.3) Dado o sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Mostrar que reordenando as equações e incógnitas poderemos fazer com que o critério de Sassenfeld seja satisfeito, mas não o das linhas.

1.7.3.4) Dado o sistema

$$\begin{cases} 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 10x_3 & = & -1 \end{cases}$$

a) Verificar a convergência usando o critério das linhas e o critério de Sassenfeld.
b) Reslover o sistema por:
   b.1- Jacobi-Richardson.
   b.2- Gauss-Seidel.

Efetuar, em ambos os casos, duas iterações partindo-se d0 vetor $x^{(0)} = (-2.4; 5; 0.3)^t$.

1.7.3.5) Calcular u_2, u_3, u_4 e u_5 resolvendo a equação de diferenças

(*) $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = n$

com as condições de contorno $u_1 = 0$ e $u_6 = 1$

Observação: Escrever (*) para n = 1, 2, 3 e 4 e resolver o sistema resultante pelo Método de Gauss-Seidel.

1.7.3.6) Dado o sistema:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

a) Verificar a convergência usando o critério de Sassenfeld.
b) Resolver pelo Método de Gauss-Seidel (3 iterações a partir do vetor nulo).