1- SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES E INVERSÃO DE MATRIZES

1.1- Métodos exatos para solução de sistemas lineares

Métodos para solução de sistemas de equações lineares são divididos principalmente em dois grupos: 1) Métodos Exatos: são aqueles que forneceriam a solução exata, não fossem os erros de arredondamento, com um número finito de operações; e 2) Métodos Iterativos: são aqueles que permitem obter as raízes de um sistema com uma dada precisão através de um processo infinito convergente. Veremos neste capítulo somente métodos exatos.

1.1.1- Métodos para Sistemas Triangulares Inferiores.

Seja o sistema triangular inferior:

$$\begin{cases} a_{11} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

onde $a_{ii} \neq 0$, i = 1, 2, ...,n.

Por **substituição progressiva** podemos resolvê-lo pelas fórmulas:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \right) / \; a_{ii} \; ; \qquad i = 2, 3, ..., n.$$

1.1.2- Métodos para Sistema Triangulares Superiores.

Seja o sistema triangular superior

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

onde $a_{ii} \neq 0$; i = 1,2,...,n.

Por **substituição Retroativa** podemos resolvê-lo pelas fórmulas:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right) / a_{ii} \qquad i = n-1, \ldots, 1$$

Exemplo 1.1.1:

a) Resolver o sistema triangular inferior,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Por substituição progressiva tem-se: $y_1 = 9$ e $y_2 = 1$

$$\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 + y_3 = 7 \quad \rightarrow \quad y_3 = 2$$

$$\therefore \quad y = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Resolver o sistema triangular superior

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por substituição retroativa: $x_3 = 2$

$$-x_2 + x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 3\,x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1$$

$\therefore$ a solução deste sistema é $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.2- O Método de eliminação de Gauss ou Método de Gauss Simples.

Seja o sistema linear $Ax = b$, onde A tem todas as submatrizes principais não singulares.

O método de eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema dado num sistema triangular equivalente pela aplicação repetida da operação:

> "subtrair de uma equação outra equação multiplicada por uma constante diferente de zero".

É claro que tal operação não altera a solução do sistema, isto é, obtem-se com ela outro sistema equivalente ao original.

Descrição do algoritmo:

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

cuja matriz dos coeficientes chamaremos $A^{(1)}$.

Montamos a tabela 1:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

onde:

$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$; $b_i^{(1)} = b_i$; $i, j = 1, 2, ..., n$

Por hipótese temos que $a_{11}^{(1)} \neq 0$, pois $\det(A_1) \neq 0$.

Primeiro Passo:

Eliminar a incógnita x_1 da 2^a, 3^a, ..., n^a equações (isto é, zerar os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal) ; para isso:

Subtraímos da 2^a. equação a 1^a. equação multiplicada por $\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$

Subtraímos da 3ª. equação a 1ª. equação multiplicada por $\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$

Subtraímos da nª. equação a 1ª. equação multiplicada por $\frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$

Passamos então da tabela inicial à tabela 2:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)}\ a_{12}^{(1)}\ a_{13}^{(1)} \cdots a_{1n}^{(1)}\ b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}\ a_{23}^{(2)} \cdots a_{2n}^{(2)}\ b_2^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n2}^{(2)}\ a_{n3}^{(2)} \cdots a_{nn}^{(2)}\ b_N^{(2)} \end{pmatrix}$$

onde: $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$; $\quad$ i = 2, 3, ..., n

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - b_1^{(1)} \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \qquad j = 1, 2, ..., n$$

Temos por hipótese que $a_{22}^{(2)} \neq 0$, pois det (A_2) $\neq 0$.

Segundo passo.

Eliminar a incógnita x_2 da 3ª. , 4ª. , ..., nª. equações (isto é, zerar os elementos da segunda coluna abaixo da diagonal) ; para isso

Subtraímos da 3ª. equação a 2ª. equação multiplicada por $\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$

Subtraímos da 4ª. equação a 2ª. equação multiplicada por $\frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$

- -

Subtraímos da nª. equação a 2ª. equação multiplicada por $\frac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$

Obtemos então a tabela 3:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)}\ a_{12}^{(1)}\ a_{13}^{(1)} \cdots a_{1n}^{(1)}\ b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}\ a_{23}^{(2)} \cdots a_{2n}^{(2)}\ b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)} \cdots a_{3n}^{(3)}\ b_3^{(3)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n3}^{(3)} \cdots a_{nn}^{(3)}\ b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

onde $a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{2j}^{(2)} \dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$; $b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - b_2^{(2)} \dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$; i = 3, 4, ..., n; j = 2, 3, ..., n

E assim sucessivamente, chegaremos ao:

<u>(n -1) º Passo</u>

Temos por hipótese que $a_{n-1,\ n-1}^{(n-1)} \neq 0, \text{pois} \det(A_{n-1}) \neq 0.$

Eliminar a incógnita x_{n-1} da n^a^. equação (isto é, zerar o elemento da (n-1)ª coluna abaixo da diagonal); para isso:

Subtraímos da nª. equação, a (n-1)ª. equação multiplicada por $\dfrac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}$.

E assim, obtemos a tabela n:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} \ a_{12}^{(1)} \ a_{13}^{(1)} \cdots a_{1,n-1}^{(1)} \ a_{1n}^{(1)} \ b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} \ a_{23}^{(2)} \cdots a_{2,n-1}^{(2)} \ a_{2n}^{(2)} \ b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)} \cdots a_{3,n-1}^{(3)} \ a_{3n}^{(3)} \ b_3^{(3)} \\ a_{n-1,n-1}^{(n-1)} \ a_{n-1,n}^{(n-1)} b_{n-1}^{(n-1)} \\ a_{nn}^{(n)} \ b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

onde:

$$a_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{(n-1)} - a_{n-1,j}^{(n-1)} \cdot \frac{a_{i,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}$$

$$b_i^{(n)} = b_i^{(n-1)} - b_{n-1}^{(n-1)} \cdot \frac{a_{i,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,\ n-1}^{(n-1)}}; \ i = n; \ j = n-1, n.$$

Assim, o sistema triangular superior obtido será:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1,n-1}^{(1)} + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2,n-1}^{(2)} + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3,n-1}^{(3)} + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + \quad a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

é equivalente ao Sistema Linear original.

Exemplo 1.2.1:

Resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

usando o método de Eliminação de Gauss.

Temos a tabela 1:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \Rightarrow a_{21}^{(2)} = 0$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \Rightarrow a_{22}^{(2)} = \frac{10}{3}$$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \Rightarrow a_{23}^{(2)} = \frac{4}{3}$$

$$b_{2}^{(2)} = b_{2}^{(1)} - b_{1}^{(1)} \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \Rightarrow b_{2}^{(2)} = \frac{14}{3}$$

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \Rightarrow a_{31}^{(2)} = 0$$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \Rightarrow a_{32}^{(2)} = 1$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \Rightarrow a_{33}^{(2)} = \frac{17}{2}$$

$$b_{3}^{(2)} = b_{3}^{(1)} - b_{1}^{(1)} \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \Rightarrow b_{3}^{(2)} = \frac{19}{2}$$

Assim obtemos a tabela 2:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & 14/3 \\ 0 & 1 & 17/2 & 19/2 \end{pmatrix}$$

2° Passo:

$$a_{32}^{(3)} = a_{32}^{12)} - a_{22}^{(2)} \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \Rightarrow a_{32}^{(3)} = 0$$

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - a_{23}^{(2)} \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \Rightarrow a_{33}^{(3)} = \frac{81}{10}$$

$$b_{3}^{(3)} = b_{3}^{(2)} - b_{2}^{(2)}. \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \Rightarrow b_{3}^{(3)} = \frac{81}{10}$$

Omitindo aqui a tabela 3, diretamente, obtemos o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 10/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 81/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14/3 \\ 81/10 \end{pmatrix}$$

Solução:

$$\therefore \frac{81}{10} x_3 = \frac{81}{10} \Rightarrow x_3 = 1$$

$$\frac{10}{3} x_3 + \frac{4}{3} x_3 = \frac{14}{3} \Rightarrow x_2 = 1$$

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \quad \Rightarrow x_1 = 1$$

Portanto, a solução de :

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \text{ é } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>1.2.1 O Método de Gauss com Pivoteamento Parcial</u>

1) O elemento $a_{kk}^{(k)}$ é o pivot do K^{o} passo.

2) Se em algum passo K encontrarmos $a_{kk}^{(k)} = 0$ isso significa que det (A_k) = 0.
Nesse caso, o sistema ainda pode Ter solução determinada (basta que det (A) ≠ 0).
O método pode ser continuado simplesmente permutando a k^{a} equação com qualquer outra abaixo cujo coeficiente da K^{a} incógnita seja ≠ 0.

3) Análise de propagação de erros de arredondamento para o algorítmo de Gauss indicam a conveniência de serem todos multiplicadores (as constantes $a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$ do k^{o} passo) menores que 1 em módulo; ou seja o pivot deve ser o elemento de maior valor absoluto da coluna, da diagonal (inclusive) para baixo.

Podemos então em cada passo, escolher na coluna correspondente o elemento de maior valor absoluto, da diagonal (inclusive) para baixo, e fazer uma permutação nas equações do sistema, de modo que esse elemento venha a ocupar a posição diagonal.

O exemplo abaixo ilustra as observações de nº 2 e 3.

Exemplo 1.2.2:

Resolver usando o método de Eliminação de Gauss o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \end{cases}$$

Montamos a tabela

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Em vista da observação 3) : passamos da tabela inicial à tabela

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

isto é, colocamos na posição do pivot o maior elemento da coluna, e aplicando o 1º passo, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -5/3 & -5/3 \\ 0 & -2 & 14/3 & 8/3 \end{pmatrix}$$

Vemos aqui que o elemento $a_{32}^{(2)} = 0$ (como já dissemos (obs.2) isso significa que det(A_2)= 0. De fato: det(A_2) = $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ = 0).

Como o elemento $a_{32}^{(2)} \neq 0$, permutamos a 3ª equação com a 2ª equação e assim obtemos a tabela:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 14/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & -5/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

a qual corresponde a um sistema triangular.

Portanto, temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 14/3 \\ 0 & 0 & -5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

Assim

$$-\frac{5}{3}x_3 = -\frac{5}{3} \Rightarrow x_3 = 1$$

$$-2x_2 + \frac{14}{3}x_3 = \frac{8}{3} \Rightarrow x_2 = 1$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow x_1 = 1$$

Logo, a solução de:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases} \quad \text{é} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2.2 O Método de Gauss com Pivoteamento Total

Neste método é adotada a seguinte estratégia:

- no k-ésimo passo é escolhido para pivô o elemento de maior módulo entre todos os elementos que ainda atuam no processo de eliminação, ou seja, o elemento pivô será:

$$\max_{i,j \geq k} \left| a_{ij}^{(k-1)} \right|.$$

- esta estratégia não é usualmente empregada pois envolve uma comparação entre os elementos envolvidos na troca de linhas e colunas, o que , evidentemente acarreta um esforço computacional maior que a estratégia de pivoteamento parcial.

1.2.3- Exercícios

1.2.3.1) Resolver pelo método de Eliminação de Gauss, o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -5 \\ 4x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & -7 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{cases}$$

1.2.3.2) Considere o sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -12 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 20 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Pede-se:

a) Resolver pelo Método de Eliminação de Gauss.

b) Calcular o determinante de A, onde A é matriz dos coeficientes.

1.2.3.3) Verificar usando Eliminação de Gauss que o seguinte sistema não tem solução:

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{cases}$$

1.2.3.4) Exercícios complementares: fazer exercícios relativos aos tópicos vistos dos livro: Barroso, L.C. e Ruggiero, M. A. G. (ver no link “Conclusão”)