

4.6 - Funções Spline em Interpolação

Se a função $f(x)$ está tabelada em $(n + 1)$ pontos e a aproximarmos de grau n que a interpola sobre os pontos tabelados, o resultado dessa aproximação pode ser desastroso.

Uma alternativa é interpolar $f(x)$ em grupos de poucos pontos, obtendo-se polinômio de grau menor, e impor condições para que a função de aproximação seja contínua e tenha derivadas contínuas até uma certa ordem.

A figura mostra o caso em que aproximamos a função por uma função linear por partes, que denotaremos $S_1(x)$.

Figura 4.6.1 (ver livro de Ruggiero M.A. S.)

Observamos que a função $S_1(x)$ é contínua, mas não é derivável em todo o intervalo (x_0, x_4) , uma vez que $S'_1(x)$ não existe para $x = x_i$, $1 \leq i \leq 3$.

Podemos optar também por, a cada três pontos: x_i, x_{i+1}, x_{i+2} , passar um polinômio de grau 2 e, neste caso, teremos também garantia só de continuidade da função que vai aproximar $f(x)$.

Figura 4.6.2 (ver livro de Ruggiero M.A. S.)

No caso das funções spline, a opção feita é aproximar a função tabelada, em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, por um polinômio de grau p , com algumas imposições sobre a função conforme a definição a seguir.

Definição 4.6.1:

Considere a função $f(x)$ tabelada nos pontos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Uma função $S_p(x)$ é denominada spline de grau p com nós nos pontos x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, se satisfaz as seguintes condições:

- a) em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, (n - 1)$, $S_p(x)$ é um polinômio de grau p : $S_p(x)$.
- b) $S_p(x)$ é contínua e tem derivada contínua até ordem $(p - 1)$ em $[a, b]$.
Se, além disto, $S_p(x)$ também satisfaz a condição:
- c) $S_p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, então será denominada spline interpolante.

A origem do nome spline vem de uma régua elástica, usada em desenhos de engenharia, que pode ser curvada de forma a passar por um dado conjunto de pontos (x_i, y_i) , que tem o nome de spline. Sob certas hipóteses (de acordo com a teoria da elasticidade) a curva definida pela régua pode ser descrita aproximadamente como sendo uma função por partes, cada qual um polinômio cúbico, de tal forma que ela e suas duas primeiras derivadas são contínuas sempre. A terceira derivada, entretanto, pode ter descontinuidades nos pontos x_i . Tal função é uma spline cúbica interpolante com nós nos pontos x_i , segundo a definição anterior.

4.6.1- Spline Linear Interpolante

A função spline linear interpolante de $f(x)$, $S_1(x)$, nos nós $x_0, x_1, \dots, x_n$ pode ser escrita em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ como

$$s_i(x) = f(x_{i-1}) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Verificação:

- a) $S_1(x)$ é polinômio de grau 1 em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, por definição;
- b) $S_1(x)$ é contínua em (x_{i-1}, x_i) , por definição, e, nos nós x_i , realmente S_1 está bem definida, pois:
 $s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) = f(x_i) \Rightarrow S_1(x)$ é contínua em $[a, b]$ e, portanto, $S_1(x)$ é spline linear;
- c) $S_1(x_i) = s_i(x_i) = f(x_i) \Rightarrow S_1(x)$ é spline linear interpolante de $f(x)$ nos nós $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Exemplo 4.6.1:

Achar a função spline linear que interpola a função tabelada:

x	x_0	x_1	x_2	x_3
	1	2	5	7
$f(x)$	1	2	3	2.5

De acordo com a definição,

$$\begin{aligned} s_1(x) &= f(x_0) \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \\ &= 1 \frac{2 - x}{2 - 1} + 2 \frac{x - 1}{2 - 1} = 2 - x + 2x - 2 = x, x \in [1, 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2(x) &= f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \\ &= 2 \frac{5 - x}{5 - 2} + 3 \frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{2}{3}(5 - x) + x - 2 = \frac{1}{3}(x + 4), x \in [2, 5] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3(x) &= f(x_2) \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + f(x_3) \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \\ &= 3 \frac{7 - x}{7 - 5} + 2.5 \frac{x - 5}{7 - 5} = \frac{1}{2}(-0.5x + 8.5), x \in [5, 7]. \end{aligned}$$

4.6.2- Spline Cúbica Interpolante

A spline linear apresenta a desvantagem de ter derivada primeira descontínua nos nós.

Se usarmos splines quadráticas, teremos que $S_2(x)$ tem derivadas contínuas até ordem 1 apenas e, portanto, a curvatura de $S_2(x)$ pode trocar nos nós. Por esta razão, as splines cúbicas são mais usadas.

Uma spline cúbica, $S_3(x)$, é uma função polinomial por partes, contínua, onde cada parte, $s_k(x)$, é um polinômio de grau 3 no intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$.

$S_3(x)$ tem a primeira e segunda derivadas contínuas, o que faz com que a curva $S_3(x)$ não tenha picos e nem troque abruptamente de curvatura nos nós.

Vamos reescrever a definição de spline cúbica interpolante:

Supondo que $f(x)$ esteja tabelada nos pontos x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ a função $S_3(x)$ é chamada spline cúbica interpolante de $f(x)$ nos nós x_i , $i = 0, \dots, n$ se existem n polinômios de grau 3, $s_k(x)$, $k = 1, \dots, n$ tais que:

- i) $S_3(x) = s_k(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$
- ii) $S_3(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$
- iii) $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, (n - 1)$
- iv) $s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, (n - 1)$
- v) $s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, (n - 1)$

Para simplicidade de notação, escreveremos $s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Assim, o cálculo de $S_3(x)$ exige a determinação de 4 coeficientes para cada k , num total de $4n$ coeficientes: $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, c_n, d_n$.

Impondo as condições para que $S_3(x)$ seja spline interpolante de f em $x_0, \dots, x_n$ teremos:

$(n + 1)$ condições para que $S_3(x)$ interpole $f(x)$ nos nós;

$(n - 1)$ condições para que $S_3(x)$ esteja bem definida nos nós (continuidade de $S_3(x)$ em $[x_0, x_n]$);

$(n - 1)$ condições para que $S'_3(x)$ seja contínua em $[x_0, x_n]$; e

$(n - 1)$ condições para que $S''_3(x)$ seja contínua em $[x_0, x_n]$, num total de $(n + 1 + 3(n - 1)) = 4n - 2$ condições. Portanto temos duas condições em aberto. Essas condições podem ser impostas de acordo com informações físicas que tenhamos sobre o problema etc; citaremos mais adiante algumas opções, dentre as mais usadas.

De acordo com a definição que demos para cada $s_k(x)$, a condição (i) da definição $S_3(x)$ está automaticamente satisfeita.

Para impor a condição (ii) montamos, para $k = 1, \dots, n$, as equações:

(1) $s_k(x) = d_k = f(x_k)$, às quais devemos acrescentar mais a equação:

$$(2) \quad s_1(x_0) = f(x_0) \Rightarrow -a_1 h_1^3 + b_1 h_1^2 - c_1 h_1 + d_1 = f(x_0) \quad \text{onde usamos a notação } h_k = x_k - x_{k-1}, \text{ com } k = 1.$$

A condição (iii) é satisfeita através das $(n - 1)$ equações: para $k = 1, \dots, (n - 1)$, $s_{k+1}(x_k) = f(x_k)$, ou seja:

$$(3) \quad -a_{k+1} h_{k+1}^3 + b_{k+1} h_{k+1}^2 - c_{k+1} h_{k+1} + d_{k+1} = f(x_k)$$

Para impor as condições (iv) e (v), precisaremos das derivadas das $s_k(x)$:

$$(4) \quad s'_k(x) = 3a_k(x - x_k)^2 + 2b_k(x - x_k) + c_k$$

$$(5) \quad s''_k(x) = 6a_k(x - x_k) + 2b_k.$$

Observamos que $s''_k(x_k) = 2b_k$. Assim cada coeficiente b_k pode ser escrito em função de $s''_k(x_k)$:

$$(6) \quad b_k = \frac{s''_k(x_k)}{2}$$

Analogamente, como $s''_k(x_{k-1}) = -6a_k h_k + 2b_k$, podemos também escrever a_k em função das derivadas segundas nos nós, pois

$$a_k = \frac{2b_k - s''_k(x_{k-1})}{6h_k} = \frac{s''_k(x_k) - s''_k(x_{k-1})}{6h_k}$$

e, impondo agora a condição (v), ($s''_k(x_{k-1}) = s''_{k-1}(x_{k-1})$), obtemos:

$$(7) \quad a_k = \frac{s''_k(x_k) - s''_{k-1}(x_{k-1})}{6h_k}. \quad \text{Observamos que, no caso } k = 1, \text{ estamos}$$

introduzindo uma variável, $s''_0(x_0)$, arbitrária.

Uma vez que $d_k = f(x_k)$ e já expressamos a_k e b_k , podemos usar (2) e (3) para termos c_k também em função das derivadas segundas nos nós. Observamos que tirar c_k da equação (2) e, para $k = 1, \dots, (n - 1)$ usar (3) é o mesmo que, para $k = 1, 2, \dots, n$, termos:

$$(8) \quad c_k = \frac{-f(x_{k-1}) - a_k h_k^3 + b_k h_k^2 + d_k}{h_k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - (a_k h_k^2 - b_k h_k) \\
&= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \left\{ \frac{[s_k''(x_k) - s_k''(x_{k-1})] h_k}{6} - \frac{s_k''(x_k)}{2} h_k \right\}
\end{aligned}$$

ou seja:

$$c_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \frac{-2s_k''(x_k)h_k - s_{k-1}''(x_{k-1})h_k}{6}.$$

Se usarmos mais notações

$$s_k''(x_k) = g_k \text{ e}$$

$f(x_k) = y_k$, teremos:

$$(9) \quad a_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k}$$

$$(10) \quad b_k = \frac{g_k}{2}$$

$$(11) \quad c_k = \left[\frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1} h_k}{6} \right] \text{ e}$$

$$(12) \quad d_k = y_k.$$

Assim para $k = 1, 2, \dots, n$, podemos calcular todos os coeficientes de $s_k(x)$ em função de $g = s_j''(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Impondo agora a condição (iv) que ainda não foi utilizada, $s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, (n-1)$ teremos:

$$s'_k(x_k) = c_k = 3a_{k+1}h_{k+1}^2 - 2b_{k+1}h_{k+1} + c_{k+1}$$

$$\text{donde } c_{k+1} = c_k - 3a_{k+1}h_{k+1}^2 + 2b_{k+1}h_{k+1}$$

e usando (9), (10) e (11)

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} + \frac{2h_{k+1}g_{k+1} + g_k h_{k+1}}{6} =$$

$$= \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1}h_k}{6} - 3\left(\frac{g_{k+1} - g_k}{6}\right)h_{k+1} + 2\left(\frac{g_{k+1}h_{k+1}}{2}\right).$$

Agrupando os termos semelhantes, para $k = 1, \dots, n-1$,

$$\frac{1}{6} [h_k g_{k-1} + (2h_k + 3h_{k+1} - h_{k+1})g_k + (6h_{k+1} - 3h_{k+1} - 2h_{k+1})g_{k+1}] =$$

$$= \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k},$$

ou seja:

$$(13) \quad h_k g_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})g_k + h_{k+1}g_{k+1} = 6\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right)$$

que é um sistema de equações lineares com $(n-1)$ equações ($k = 1, \dots, (n-1)$) e $(n+1)$ incógnitas: $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}, g_n$ e portanto, indeterminado, $Ax = b$

onde $x = (g_0, g_1, \dots, g_n)^T$

$$A = \begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_4 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) & h_n \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n+1)}$$

e

$$b = 6 \begin{pmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}_{(n-1) \times 1}$$

Para podermos resolver esse sistema, de forma única, teremos de impor mais duas condições conforme já comentamos.

De posse da solução, aí então poderemos determinar a_k , b_k , c_k e d_k para cada $s_k(\bar{x})$.

Algumas alternativas:

- 1) $S_3''(x_0) = g_0 = 0$ e $S_3''(x_n) = g_n = 0$, que é chamada spline natural.

Esta escolha é equivalente a supor que os polinômios cúbicos nos intervalos extremos ou são lineares ou próximos de funções lineares.

- 2) $g_0 = g_1$, $g_n = g_{n-1}$, que é equivalente a supor que as cúbicas são aproximadamente parábolas, nos extremos.

- 3) Impor valores para as inclinações em cada extremo, por exemplo $S_3'(x_0) = A$ e $S_3'(x_n) = B$, o que nos fornecerá as duas equações adicionais:

$$s_1'(x_0) = 3a_1h^2 - 2b_1h + c^1 = A$$

$$s_n'(x_n) = c_n = B.$$

Exemplo 4.6.2:

Vamos encontrar uma aproximação para $f(0.25)$ por spline cúbica natural, interpolante da tabela:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
f(x)	3	1.8616	-0.5571	-4.1987	-9.0536

Temos 4 subdivisões do intervalo $[0, 2.0]$, donde $n = 4$, e portanto temos de determinar $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$ e $s_4(x)$ resolvendo, para $1 \leq k \leq 3$ ($n - 1 = 3$), o sistema:

$$(14) \quad h_k g_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})g_k + h_{k+1}g_{k+1} = 6 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right)$$

No nosso exemplo, $h_k = h = 0.5$. Assim (14) fica:

$$(15) \quad hg_{k-1} + 4hg_k + hg_{k+1} = \frac{6}{h}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$$

$$\begin{cases} hg_0 + 4hg_1 + hg_2 = \frac{6}{h}(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ hg_1 + 4hg_2 + hg_3 = \frac{6}{h}(y_3 - 2y_2 + y_1) \\ hg_2 + 4hg_3 + hg_4 = \frac{6}{h}(y_4 - 2y_3 + y_2) \end{cases}$$

Como queremos a spline cúbica natural, $g_0 = g_4 = 0$, e então o sistema a ser resolvido será:

$$\begin{pmatrix} 4h & h & 0 \\ h & 4h & h \\ 0 & h & 4h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \frac{6}{h} \begin{pmatrix} y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \end{pmatrix}$$

e substituindo os valores de h e de y_i , $0 \leq i \leq 4$,

$$g_3 = -6.252$$

$$g_2 = -4.111$$

$$g_1 = -6.6541$$

Levando estes valores em a_k , b_k , c_k e d_k encontramos $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$ e $s_4(x)$. Como queremos uma aproximação para $f(0.25)$, $f(0.25) \approx s_1(0.25)$ e $s_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1$ onde, por (9), (10), (11) e (12)

$$a_1 = \frac{g_1 - g_0}{6h} = \frac{-6.6541}{3} = -2.2180$$

$$b_1 = \frac{g_1}{2} = -3.3270$$

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{2hg_1 + g_0h}{6} = -3.3858$$

$$d_1 = y_1 = 1.8616$$

$$s_1(0.25) = -2.2180(-0.25)^3 - 3.3270(0.25)^2 - 3.3858(-0.25) + 1.8616 = 2.5348.$$

Assim, por spline cúbica natural interpolante

$$f(0.25) \approx s_1(0.25) = 2.5348$$

4.6.3- Exercícios (ver Ruggiero páginas 256 a 261, exercícios 1 ao 18)