

4.4- Forma de Newton-Gregory para o polinômio interpolador.

No caso em que os nós da interpolação $x_0, x_1, \dots, x_n$ são igualmente espaçados, podemos usar a forma de Newton-Gregory para obter $p_n(x)$. Estudaremos inicialmente o *operador de diferenças ordinárias*:

Sejam $x_0, x_1, x_2, \dots$ pontos que se sucedem com passo h , isto é, $x_j = x_0 + jh$. Chamamos operador de diferenças ordinárias:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

.

.

.

$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x)$$

e naturalmente $\Delta^0 f(x) = f(x)$

Da mesma maneira que com as diferenças divididas, conhecida $f(x)$ ou conhecidos seus valores em $x_0, x_1, \dots, x_n$, podemos construir uma tabela de diferenças ordinárias:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
x_0	$f(x_0)$		
		$\Delta f(x_0)$	
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$
		$\Delta f(x_1)$	
x_2	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$ etc.
		$\Delta f(x_2)$	.
		.	.
x_3	$f(x_3)$	.	.
.	.	.	
.	.		
.	.		

Exemplo 4.4.1:

Seja $f(x)$ tabelada abaixo:

x	-1	0	1	2	3
f(x)	2	1	2	5	10

A tabela de diferenças ordinárias será:

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
-1	2			
		-1		
0	1	1	2	0
1	2	3	2	0
2	5	5	2	
3	10			

Teorema 4.4.1

Se $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ então $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n n!}$.

Demonstração (por indução)

Para $n = 1$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{h(1!)}$$

Supondo que $f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = \frac{\Delta_{n-1} f(x_0)}{h^{(n-1)}(n-1)!}$, temos

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = \\ &= \frac{\frac{\Delta^{n-1} f(x_1)}{h^{n-1}(n-1)!} - \frac{\Delta^{(n-1)} f(x_0)}{h^{n-1}(n-1)!}}{nh} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\Delta^{n-1}f(x_0 + h) - \Delta^{n-1}f(x_0)}{h^{n-1}f(n-1)!nh} = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n n!}$$

4.4.2- A Forma de Newton-Gregory

i) Considere a tabela:

x	x ₀	x ₁	...	x _n
f(x)	f(x ₀)	f(x ₁)	...	f(x _n)

onde os nós de interpolação são tais que: $x_{j+1} - x_j = h, j = 0, 1, \dots, (n-1)$.

Partindo de forma de Newton para $p_n(x)$ e usando o teorema anterior, verifique que:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{\Delta f(x_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n n!}.$$

que é a forma de Newton-Gregory para o polinômio interpolador.

ii) Usando a forma de Newton-Gregory para $p_3(x)$ obtenha uma aproximação para $f(2.7)$, onde $f(x)$ é uma função tabelada a seguir:

x	1	2	3	4	5
f(x)	0	1.3863	2.1972	2.7726	3.2189

iii) A forma de Newton-Gregory para $p_n(x)$ pode ser simplificada, se usarmos uma mudança de variáveis:

$$s = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow x = sh + x_0$$

daí,

$$(x - x_j) = sh + x_0 - (x_0 + jh) = (s - j)h.$$

Usando essa troca de variáveis, escreva a forma geral para $p_n(x)$.

4.5- Análise do erro na Interpolação Polinomial

Como já observamos, ao se aproximar uma função $f(x)$ por um polinômio interpolador de grau $\leq n$, comete-se um erro, ou seja

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) \text{ para todo } x \text{ no intervalo } [x_0, x_n].$$

O estudo do erro é importante para sabermos quão próximo $f(x)$ está de $p_n(x)$.

Um mesmo polinômio interpolador $p_1(x)$ pode interpolar duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ em x_0 e x_1 , de tal forma que o erro $E_1^1(x) = f_1(x) - p_1(x)$ possa ser maior que $E_1^2(x) = f_2(x) - p_1(x)$, $\forall x \in (x_0, x_1)$.

Isto ocorre pois o erro, neste caso, depende da concavidade das curvas, ou seja, de $f_1''(x)$ e $f_2''(x)$.

A seguir é posto um teorema que define a expressão exata do erro quando aproximamos $f(x)$ por $p_n(x)$ para n qualquer.

Teorema 4.5.1 (Teorema do Resto de Lagrange)

Sejam $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $(n + 1)$ pontos.

Seja $f(x)$ com derivadas até ordem $(n + 1)$ para todo x pertencente ao intervalo $[x_0, x_n]$.

Seja $p_n(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Então, em qualquer ponto x pertencente ao intervalo $[x_0, x_n]$, o erro é dado por

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n + 1)!}$$

onde $\xi_x \in (x_0, x_n)$.

Demonstração

Seja $G(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, $\forall x \in [x_0, x_n]$. Então para $x = x_i$ temos $f(x_i) = p_n(x_i)$, pois $G(x_i) = 0 \Rightarrow E_n(x_i) = 0$, donde a fórmula do erro está correta para $x = x_i$, $i = 0, \dots, n$.

Para cada $x \in (x_0, x_n)$, $x \neq x_i$, $i = 0, \dots, n$, seja $H(t)$ uma função auxiliar, definida por

$$H(t) = E_n(x)G(t) - E_n(t)G(x), t \in [x_0, x_n].$$

$H(t)$ possui derivadas até ordem $n + 1$, pois:

$f(t)$ possui derivada até ordem $n + 1$ por hipótese e

$p_n(t)$ possui derivadas até ordem $n + 1$; então

$E_n(t) = f(t) - p_n(t)$ possui derivadas até ordem $n + 1$.

$G(t)$ possui derivadas até ordem $n + 1$, pois é polinômio de grau $n + 1$.

Assim, $E_n(x)G(t) - E_n(t)G(x) = H(t)$ possui derivadas até ordem $n + 1$.

Verificaremos, a seguir, que $H(t)$ possui pelo menos $(n + 2)$ zeros no intervalo $[x_0, x_n]$.

Para $t = x_i$, $i = 0, \dots, n$, temos que $E_n(t) = 0$ e $G(t) = 0$, donde $H(x_i) = E_n(x)G(x_i) - E_n(x_i)G(x) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ e, para $t = x$, $H(x) = E_n(x)G(x) - E_n(x)G(x) = 0$

Assim, $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ são zeros de $H(t)$.

Concluindo, temos que a função $H(t)$:

- i) está definida no intervalo $[x_0, x_n]$;
- ii) possui derivadas até ordem $n + 1$ nesse intervalo;
- iii) possui pelo menos $n + 2$ zeros nesse intervalo.

Portanto, podemos aplicar sucessivamente o teorema de Rolle a $H(t)$, $H'(t)$, ..., $H^{(n)}(t)$, a saber:

$H'(t)$ possui pelo menos $n + 1$ zeros em (x_0, x_n) ;

$H''(t)$ possui pelo menos n zeros em (x_0, x_n) ;

.

.

.

$H^{(n+1)}(t)$ possui pelo menos um zero em (x_0, x_n) .

Mas, $H(t) = E_n(x)G(t) - E(t)G(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow H^{(n+1)}(t) = E_n(x)G^{(n+1)}(t) - E_n^{(n+1)}(t)G(x).$$

Agora, $E_n^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - p_n^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$ ($p_n(t)$ tem grau n)

$$G(t) = (t - x_0)(t - x_1) \dots (t - x_n)$$

$$\Rightarrow G^{(n+1)}(t) = (n+1)!$$

Assim, $H^{(n+1)}(t) = E_n(x)(n+1)! - f^{(n+1)}(t)G(x)$. Sendo ξ_x um zero de $H^{(n+1)}(t)$,

$$H^{(n+1)}(\xi_x) = (n+1)!E_n(x) - f^{(n+1)}(\xi_x)G(x) = 0$$

$$\Rightarrow E_n(x) = G(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad \xi_x \in (x_0, x_n).$$

Observamos que, ao aproximarmos $f(x)$ por um polinômio de interpolação de grau $\leq n$, o erro cometido está relacionado com a derivada de ordem $(n + 1)$ de $f(x)$, o que confirma a observação feita no exemplo 5.

Exemplo 4.5.1:

Seja o problema de se obter $\ln(3.7)$ por interpolação linear, onde $\ln(x)$ está tabelada abaixo:

x	1	2	3	4
ln(x)	0	0.6931	1.0986	1.3863

Como $x = 3.7 \in (3, 4)$, escolheremos $x_0 = 3$ e $x_1 = 4$

Pela forma de Newton, temos:

$$p_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] = 1.0986 + (x - 3) \frac{(1.3863 - 1.0986)}{4 - 3}$$

$$p_1(x) = 1.0986 + (x - 3)(0.2877) \Rightarrow p_1(3.7) = 1.300.$$

Dado que, com quatro casas decimais $\ln(3.7) = 1.3083$, o erro cometido é $E_1(3.7) = \ln(3.7) - p_1(3.7) = 1.3083 - 1.3 = 0.0083 = 8.3 \times 10^{-3}$.

Queremos, neste exemplo, mostrar que ξ_x , que aparece na expressão do erro do teorema anterior é tal que, $\xi_x \in (3,4) \subset (1, 4)$.

$$E_1(x) = (x - x_0)(x - x_1) \frac{f''(\xi_x)}{2}, \xi_x \in (x_0, x_1).$$

Para $x = 3.7$,

$$E_1(3.7) = (3.7 - 3)(3.7 - 4) \frac{f''(\xi_x)}{2} = 8.3 \times 10^{-3}.$$

$$\text{Agora, } f''(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

$$\text{Então, } (0.7)(-0.3) - \frac{1}{2\xi_x^2} = 8.3 \times 10^{-3} \text{ e, como } \xi_x \in (3, 4),$$

teremos $\xi_x = 3.5578$.

É natural que, se $x \neq 3.7$, $\xi_x \neq 3.5578$.

Teorema 4.5.2

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, x \in (x_0, x_n) \text{ e } \xi_x \in (x_0, x_n).$$

Demonstração vide Ruggiero p. 232.

4.5.1- Expressão do Limitante para o erro

A fórmula para o erro, expressa por:

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \xi_x \in (x_0, x_n)$$

tem uso limitado na prática, dado que serão raras as situações em que conheceremos $f^{(n+1)}(x)$, e o ponto ξ_x nunca é conhecido.

A importância da fórmula exata para $E_n(x)$ é teórica, uma vez que é usada na obtenção de estimativas de erro para as fórmulas de interpolação, diferenciação e integração numérica.

Estudaremos a seguir dois corolários do Teorema 2, que relacionam o erro com um limitante de $f^{(n+1)}(x)$.

Corolário 4.5.1

Sob as hipóteses do teorema 2, se $f^{(n+1)}(x)$ for contínua em $I = [x_0, x_n]$, podemos escrever a seguinte relação:

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

onde $M_{n+1} = \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|$.

Vide demonstração Ruggiero p. 234.

Corolário 2

Se além das hipóteses anteriores os pontos forem igualmente espaçados, ou seja,

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h,$$

então

$$|f(x) - p_n(x)| < \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)}.$$

Observe que o majorante acima independe do ponto x considerado, $x \in [x_0, x_n]$

Exemplo 4.5.2:

Seja $f(x) = e^x + x - 1$ tabelada abaixo. Obter $f(0.7)$ por interpolação linear e fazer uma análise do erro cometido.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	0.0	1.1487	2.7183	4.9811	8.3890

$$p_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1].$$

$$x = 0.7 \in (0.5, 1), \text{ então } x_0 = 0.5 \text{ e } x_1 = 1$$

$$p_1(x) = 1.1487 + (x - 0.5) \left(\frac{2.7183 - 1.1487}{1 - 0.5} \right) = 1.1487 + (x - 0.5)3.1392$$

$$p_1(0.7) = 1.7765.$$

Neste caso, temos condição de calcular o erro exato, dado por

$$|E_1(0.7)| = |f(0.7) - p_1(0.7)| = |1.7137 - 1.7765| = |-0.0628| = 0.0628$$

Os corolários 1 e 2 nos fornecem as seguintes majorações para o erro:

a) Corolário 1 (em $x = 0.7$)

$$|E_1(0.7)| \leq |(0.7 - 0.5)(0.7 - 1)| \frac{M_2}{2}$$

onde $M_2 = \max_{x \in [0.5, 1]} |f''(x)| = e^1 = 2.7183$

Então, $|E_1(0.7)| \leq 0.0815$ (realmente, $|E_1(0.7)| = 0.0628 < 0.0815$).

b) Corolário 2: para todo $x \in (0.5, 1)$, temos:

$$|E_1(x)| < \frac{h^2}{8} M_2 = \frac{(0.5)^2}{8} (2.7183) = 0.0850$$

que também confirma o resultado obtido para o erro exato.

4.5.3- Estimativa para o erro

Se a função $f(x)$ é dada na forma de tabela, o valor absoluto do erro $|E_n(x)|$ só pode ser estimado. Isto porque, neste caso, não é possível calcular M_{n+1} ; mas, se construirmos a tabela de diferenças divididas até ordem $n + 1$, podemos usar o maior valor (em módulo) destas diferenças como uma aproximação para $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$ no intervalo $[x_0, x_n]$.

Neste caso, dizemos que

$$|E_n(x)| \approx |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \quad (\text{máx } | \text{diferenças divididas de ordem } n + 1 |)$$

Exemplo 4.5.3:

Seja $f(x)$ dada na forma:

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
f(x)	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

a) Obter $f(0.47)$ usando um polinômio de grau 2.

b) Dar uma estimativa para o erro.

Tabela de diferenças

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0.2	0.16			
		0.4286		
0.34	0.22		2.0235	
		0.8333		-17.8963
$x_0 = 0.4$	0.27		-3.7033	
		0.1667		18.2494
$x_1 = 0.52$	0.29		1.0415	
		0.375		-2.6031
$x_2 = 0.6$	0.32		0.2085	
		0.4167		
0.72	0.37			

Deve-se escolher três pontos de interpolação. Como $0.47 \in (0.4, 0.52)$, dois pontos deverão ser 0.4 e 0.52. O outro tanto pode ser 0.34 como 0.6. Escolheremos $x_0 = 0.4$, $x_1 = 0.52$ e $x_2 = 0.6$.

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &= 0.27 + (x - 0.4)0.1667 + (x - 0.4)(x - 0.52)(1.0415). \end{aligned}$$

a) $p_2(0.47) = 0.2780 \approx f(0.47)$

b) $|E(0.47)| \approx |(0.47 - 0.4)(0.47 - 0.52)(0.47 - 0.6)| |18.2492|$
 $\approx 8.303 \times 10^{-3}.$