DERIVADA

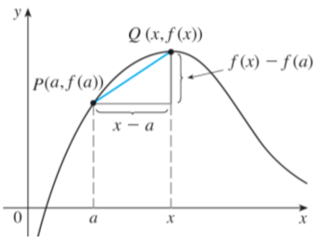
O problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema para encontrar a velocidade de um objeto envolvem determinar o mesmo tipo de limite. Este tipo especial de limite é chamado *derivada* e será interpretado como uma taxa de variação

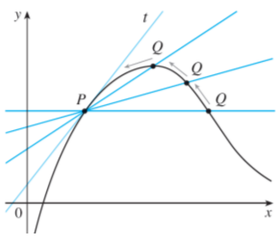
A Reta Tangente

Seja f uma função definida numa vizinhança de a. Para definir a reta tangente de uma curva $y = f(x)$ num ponto P(a, $f(a)$), consideramos um ponto vizinho Q(x,$f(x)$), em que $x \neq a$ e calculamos a inclinação (ou coeficiente angular) da reta secante PQ, que é obtida por:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Em seguida, fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva $y = f(x)$ ao obrigar x tender ao ponto a. Se m_{PQ} tender a um número m (valor limite), definimos a tangente t como sendo a reta que passa por P e tem inclinação m.





Definição: A *reta tangente* a uma curva $y = f(x)$ em um ponto P(a, $f(a)$), é a reta por P que tem a inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

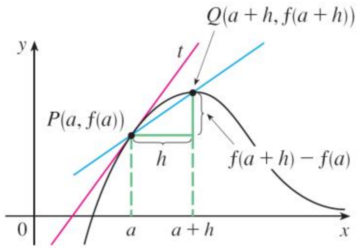
desde que esse limite exista

Exercícios:

1. Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto P(1, 1).

2. Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = x^3$ no ponto de abcissa $x = 1$.

Há outra expressão para a inclinação da reta tangente, às vezes mais fácil de ser usada. Se $h = x - a$, então $x = a + h$ e, assim, a inclinação da reta secante PQ é:



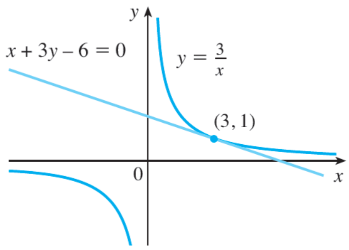
$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Quando $x \to a$, $h \to 0$ (pois $h = x - a$). Assim a expressão para a inclinação da reta tangente fica:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exercício:

Encontre uma equação da reta tangente a hipérbole $y = \frac{3}{x}$ no ponto $P(3, 1)$.

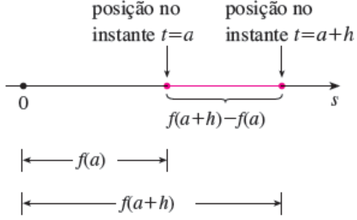


Velocidades

"A velocidade representa a razão de variação do deslocamento por unidade de variação do tempo" [1]

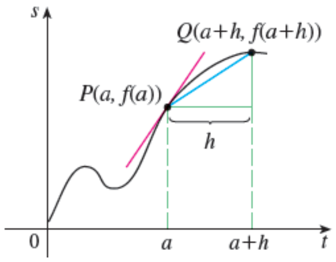
Suponha que um objeto se mova sobre uma reta de acordo com a equação $s = f(t)$, na qual s é o deslocamento do objeto a partir da origem no instante t. A função f que descreve o movimento é chamada **função de posição** do objeto.

No intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$ a variação na posição será de $f(a + h) - f(a)$.



A velocidade média neste intervalo é: $Vm = \dfrac{deslocamento}{tempo} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = m_{PQ}$

que é o mesmo que a inclinação da reta secante PQ.



Se a velocidade média for calculada em intervalos cada vez menores $[a, a+h]$, fazemos $h \to 0$. Definimos *velocidade instantânea* $v(a)$ no instante $t = a$ como o limite das velocidades médias:

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Isso significa que a velocidade no instante $t = a$ é igual à inclinação da reta tangente em P.

Exercício:

Uma bola foi abandonada do posto de observação de uma torre a 450m acima do solo. Utilizando a equação de movimento $s = f(t) = 4{,}9t^2$, determine a velocidade da bola após 5 segundos?

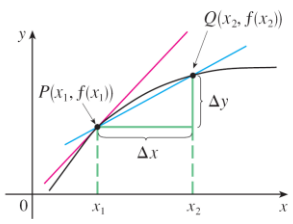
Outras taxas de variação

Se y é uma quantidade que depende de outra quantidade x, então y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x varia de x_1 para x_2, então a variação de x (também chamada de incremento de x) é $\Delta x = x_2 - x_1$ e a variação correspondente de y é $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

O quociente de diferença

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é chamado de **taxa média de variação de y em relação a x** no intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretado como a variação da reta secante PQ.



Para considerar a taxa média de variação em intervalos cada vez menores, fazemos x_2 tender a x_1 e, consequentemente, Δx tenderá a 0.

O limite dessas taxas médias de variação é chamado **taxa** (**instantânea**) **de variação de *y* em relação a *x*** em $x = x_1$, é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$.

$$\text{taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Outras taxas de variações envolvem reações químicas, custo marginal, potência, colônia de bactérias, entre outros. Todas estas taxas podem ser interpretadas como inclinações de tangente.

Derivadas

O limite da forma $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ surge sempre que calculamos uma taxa de variação em várias ciências (química, física, economia, etc). Como este tipo de limite ocorre amplamente, ele recebe nome e notação especiais.

Definição: A ***derivada de uma função em um número a***, denotado por $f'(a)$ é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existe.

Se escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$ e $h \to 0 \Leftrightarrow x \to a$. Assim,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exercício:

Encontre a derivada da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ no número a.

Derivada como a inclinação da reta tangente

A reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto P(a, $f(a)$) foi definida como sendo a reta que passa em P e tem inclinação $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, que por definição é o mesmo que a derivada $f'(a)$. Logo,

A reta tangente a $y = f(x)$ em (a, $f(a)$) é a reta que passa em (a, $f(a)$), cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a.

Usando a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, podemos escrever uma equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto (a, $f(a)$) como:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

"A derivada da função y = f(x) no ponto P é o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto P."

Exercícios:

1. Encontre uma equação da reta tangente à parábola $f(x) = x^2 - 2x + 1$ no ponto (2, 1).

2. Encontre uma equação da reta tangente à parábola $f(x) = x^2 - 8x + 9$ no ponto (3, -6).

3. Determinar a equação da reta tangente à curva $f(x)=\sqrt{x}$ no ponto P da abscissa $x = 4$.

4. Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto cuja abcissa é 2.

Derivada como taxa instantânea de variação

A taxa de variação instantânea de $y = f(x)$ em relação a x em $x = x_1$ é:

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

que por definição é o mesmo que a derivada $f\,'(x_1)$. Assim, temos uma segunda interpretação da derivada:

A derivada $f\,'(a)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ em relação a x quando $x = a$.

Exercício:

A equação de uma partícula é dada pela equação do movimento $s = f(t) = 1/(1+t)$, em que t é medido em segundos e s em metros. Encontre a velocidade após 2 segundos.

A derivada como uma função

A derivada de uma função em um número fixo a, é dada por:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Entretanto, podemos variar o número a substituindo-o por uma variável x, obtendo:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Podemos considerar f' como a nova função, chamada de **derivada de *f***. O valor de f' em x, $f'(x)$, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$. O domínio de f' é o conjunto $\{x / f'(x) \text{ existe}\}$ e pode ser menor que o domínio de f.

Exercícios:

1 - Se $f(x) = x^3 - x$, encontre $f'(x)$. Determine o domínio de f e f'.

2 - Se $f(x) = \sqrt{x-1}$, encontre a derivada de f. Determine o domínio de f e f'.

3 - Se $f(x) = \frac{1-x}{2+x}$, encontre a derivada de f.

Outras notações para derivada

Se usarmos a notação $y = f(x)$ para indicar que a variável independente é x enquanto y é a variável dependente, podemos usar como notações alternativas para a derivada:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

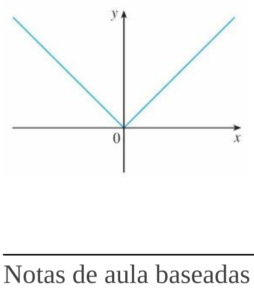
Para indica o valor de uma derivada na notação de Leibniz em um ponto específico a, usamos a notação:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \text{ ou } \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

Definição: Uma função f é derivável em um ponto a se $f(x)$ existir. É derivável em um intervalo aberto (a, b), (a, ∞), $(-a, \infty)$ ou $(-\infty, \infty)$ se for derivável em cada número do intervalo.

Exercício:

Verifique o intervalo em que a função $f(x) = |x|$ é derivável.



Teorema:

Se f for **derivável** em a, então f é **contínua** em a.

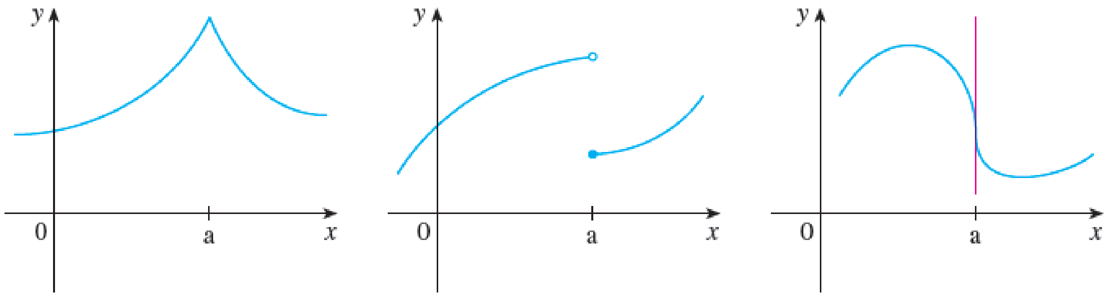
Observação: A reciproca do teorema é falsa, isto é, há funções que são contínuas, mas não são deriváveis.

Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ é contínua em 0, pois, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$. Mas, como vimos, não é diferenciável em 0.

Como uma função pode deixar de ser diferenciável?

- Se o gráfico da função tiver uma quina (ponto anguloso), então a função não terá tangente nesse ponto e, portanto, não terá derivada.
- Em toda descontinuidade de *f*, uma função deixa de ser derivável.
- A função tem uma reta tangente vertical em $x = a$, ie, *f* é contínua em a e $\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$.

Isso significa que a reta tangente fica cada vez mais íngreme quando $x \to a$.



(a) Uma quina (b) Uma descontinuidade (c) Uma tangente vertical

Exercícios:

1 - Seja $f(x) = \begin{cases} x^2, x \leq 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$. a) *f* é contínua em 1? b) *f* é derivável em 1?

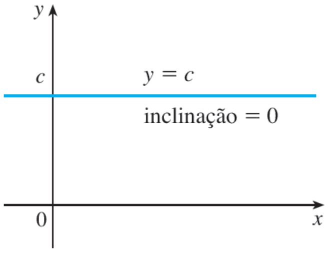
2 - Seja $f(x) = \begin{cases} x^2, x \le 1 \\ 2x-1, x > 1 \end{cases}$. a) f é derivável em 1? b) f é contínua em 1?

Regras de Derivação

Função constante

Se f é a função constante definida por $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, o gráfico dessa função é uma reta horizontal. Então $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

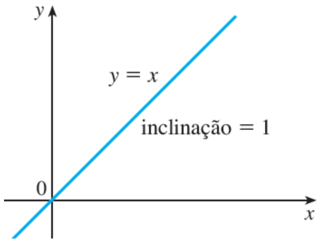


Derivada de uma função constante: $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

Função potência

Seja $f(x) = x^n$, em que n é inteiro positivo.

Se **n = 1**, $f(x) = x$. O gráfico é a reta $y = x$, cuja inclinação é 1.



$$\frac{dy}{dx}(x) = 1$$

Se **n = 2**, $f(x) = x^2$.

Se **n = 3**, $f(x) = x^3$.

Se **n = 4**, $f(x) = x^4$ e $f\,'(x) = 4x^3$.

Regra da Potência: Se n é um inteiro positivo $\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$.

Exercícios:

Encontre as derivadas:

a) $f(x) = x^6$

b) $f(x) = x^{1000}$

E se o expoente é negativo?

c) $y = x^{-1}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

E se o expoente é uma fração?

e) $f(x) = \sqrt{x}$

f) $y = \sqrt[3]{x^2}$

Regra da Potência (GERAL): Se n é um número real qualquer, então $\dfrac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$.

g) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = x\sqrt{x}$ no ponto (1, 1)

Regra da multiplicação por constante

Se c for uma constante e f uma função derivável em x então.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}(f(x))}$$

Exercício:

Encontre as derivadas:

a) $f(x) = 3x^4$

b) $f(x) = -x$

Regra da soma

Se *f* e *g* forem ambas diferenciáveis, então,

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)}$$

A regra da soma pode ser estendida para a soma de qualquer número de funções.

Escrevendo $f(x) + g(x)$ como $f(x) + (-1)g(x)$ e aplicando as regras da soma e da multiplicação por constante, obtemos a regra da diferença.

Regra da diferença

Se *f* e *g* forem ambas diferenciáveis, então,

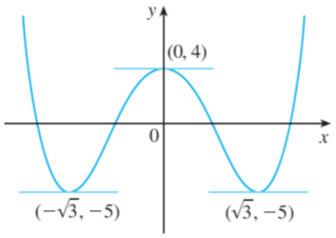
$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)}$$

As regras da multiplicação por constante, soma e diferença, podem ser combinadas com a regra da potência para derivar qualquer polinômio.

Exercícios:

1- Encontre a derivada de $y = x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5$.

2- Encontre os pontos sobre a curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ onde a reta tangente é horizontal.



3 - A velocidade de uma partícula é definida pela equação $v(t) = 6t^2 - 10t + 3$, em que v é medida em centímetros e t em segundos. Encontre a aceleração como uma função do tempo. Qual é a aceleração depois de 2 segundos?

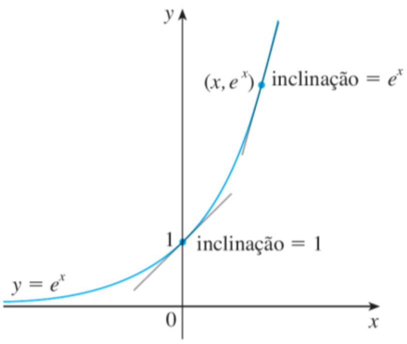
Derivada da função exponencial

Se $y = a^x$, ($a > 0$ e $a \neq 1$), então

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

Derivada da Função Exponencial Natural

A função $f(x) = e^x$ é aquela cuja reta tangente em (0, 1) tem uma inclinação $f'(0)$, que é exatamente 1. A função exponencial $f(x) = e^x$ tem a propriedade de ser sua própria derivativa. O significado geométrico desse fato é que a inclinação da reta tangente à curva $y = e^x$ é igual à coordenada y do ponto.



$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

Se $y = e^x \Rightarrow y' = e^x \ln e = e^x$.

Exercício:

Se $y = e^x - x$, encontre $y'(x)$.

Derivada da função logarítmica

Se $y = \log_a x \; (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$, então:

$$\boxed{y' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x}\frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}}$$

Um caso particular da função logarítmica é a função logaritmo natural. Se $y = \ln x$, então:

$$\boxed{y' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}}$$

Regra do Produto

Se f e g são funções diferenciáveis, então,

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]}$$

Exercícios:

1- Se $y = xe^x$, encontre $y'(x)$.

2- Se $f(t) = \sqrt{t}(1-t)$, encontre $f'(x)$.

Regra do quociente

Se f e g são funções diferenciáveis e $g(x) \neq 0$, então,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}}$$

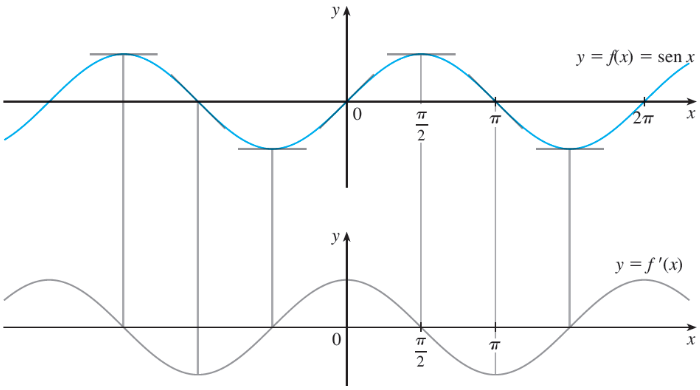
Exercícios:

1 - Seja $y = \dfrac{x^2+x-2}{x^3+6}$. Encontre $y'(x)$.

2 - Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ no ponto $(1, e/2)$.

Derivada de funções trigonométricas.

Todas as funções trigonométricas são contínuas em todo número em seus domínios. Se esboçarmos o gráfico da função $f\ (x) = sen\ x$ e usarmos a interpretação de $f\ '(x)$ como a inclinação da tangente à curva do seno a fim de esboçar o gráfico de $f\ '$, isso dará a impressão de que o gráfico de $f\ '$ pode ser igual à curva do cosseno.



Para verificar essa conjectura, seja $f(x) = \text{sen}(x)$, então:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}\,x\cos h + \cos x\ sen\,h - sen\,x}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\text{sen}\,x\cos h - sen\,x}{h} + \frac{\cos x\ sen\,h}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}\,x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0}\cos x\frac{\text{sen}\,h}{h} = \lim_{h\to 0}\text{sen}\,x.\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}\frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} + \lim_{h\to 0}\cos x.\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}\,h}{h} = \cos x$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(sen\,x) = \cos x}$$

Usando o mesmo método, podemos mostrar que:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -sen\,x}$$

Exercício:

Derive $y = x^2\ sen\ x$.

Para obter a derivada da função tangente, fazemos:

$$\frac{d}{dx}tg\,x = \frac{d}{dx}\left(\frac{sen\,x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x(\text{sen}\,x)' - \text{sen}\,x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos x\cos x - \text{sen}\,x(-sen\,x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(tg\ x) = \sec^2 x}$$

Usando a regra do quociente, encontramos também as derivadas das funções cotangente, secante e cossecante, obtendo:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x . tg\ x \\ \dfrac{d}{dx}(\text{cossec}\ x) = -\text{cossec}\ x . cotg\ x \\ \dfrac{d}{dx}(cotg\ x) = -\text{cossec}^2\ x \end{array}}$$

Exercício:

1 - Encontre a derivada de $y = \dfrac{\sec x}{1 + tg\ x}$.

2 - Encontre a derivada de y = e^x cossec x.

Derivadas de ordem superior

Se f é uma função derivável em um determinado intervalo, sua derivada f' também é uma função e pode ter sua própria derivada, denotada por $f' = f''$. Esta nova função f'' é chamada de **segunda derivada** ou **derivada de ordem dois**.

Exercícios:

1. Se $f(x) = 3x^2 + 8x + 1$, determine $f''(x)$.

2. Se $f(x) = \text{tg}\, x$, determine $f''(x)$.

Se f'' é uma função derivável, sua derivada, representada por f''', é chamada de *derivada terceira* de $f(x)$. Sucessivamente, para n inteiro positivo, $f^{(n)}(x)$ indica a derivada de ordem n ou n-ésima derivada de f que é obtida partindo-se de f e calculando suas derivada sucessivas n vezes. Utilizando a notação de Leibniz, temos:

$$\frac{dy}{dx};\frac{d^2y}{dx};\frac{d^3y}{dx};\ ...\ ;\frac{d^ny}{dx}$$

Exercícios:

1. Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x$, determine $f^{(iv)}$.

2. Encontre a 27ª derivada de cos x.

Regra da Cadeia

As regras de derivação estudadas até agora nos permitem calcular a derivada de diversas funções, mas como derivar a função $F(x) = \sqrt{x^2+1}$? Observe que $F(x)$ é uma função composta. Se assumirmos que $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$, podemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, ou seja, $F = f \circ g$.

Sabemos derivar ambas: $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ .Entretanto queremos $\frac{dy}{dx}$, ou seja, precisamos de uma regra que nos permita calcular a derivada de $F = f \circ g$ em termos das derivadas de f e g.

A derivada da função composta $f \circ g$ é o produto das derivadas de f e g. Esse fato é uma das mais importantes regras de derivação, chamada de ***regra da cadeia***.

Considere as seguintes taxas de variação:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{du} = \text{taxa de variação de } y \text{ em relação a } u \\ \dfrac{du}{dx} = \text{taxa de variação de } u \text{ em relação a } x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\text{: taxa de variação de } y \text{ em relação a } x \text{ é } \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Regra a cadeia

Se g for derivável em x e f derivável em $g(x)$, então a função composta $F = f \circ g$, definida por $F(x) = f(g(x))$ será derivável em x e F' será dada pelo produto:

$$F'(x) = f'(g(x)) \,.\, g'(x)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Exercício:

Utilize a regra da cadeia para encontrar a derivada das funções a seguir:

a) $F(x) = \sqrt{x^2+1}$

Ao usarmos a regra da cadeia, trabalhamos de fora para dentro:

$$\frac{dy}{dx} \quad \underbrace{f}_{\substack{\text{função}\\\text{de fora}}} \quad \underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculada}\\\text{na função}\\\text{de dentro}}} \quad = \quad \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada}\\\text{da função}\\\text{de fora}}} \quad \underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculada}\\\text{na função}\\\text{de dentro}}} \quad \cdot \quad \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada}\\\text{da função}\\\text{de dentro}}}$$

b) $f(x) = (x^2 + 1)^5$

c) $y = \text{sen}^2(x)$

d) $y = \text{sen}(x^2)$

Em geral, se $y = \text{sen}(u)$, em que u é uma função derivável de x, pela regra da cadeia:

$$y = \text{sen}\, u \Rightarrow y' = \cos u \,.u'$$

De modo análogo, todas as fórmulas para derivar funções trigonométricas podem ser combinadas com a regra da cadeia.

- se $y = \text{sen}\, u \Rightarrow y' = \cos u \,.u'$
- se $y = \cos u \Rightarrow y' = -\,\text{sen}\, u \,.u'$
- se $y = \text{tg}\, u \Rightarrow y' = \sec^2 u \,.u'$
- se $y = \text{cotg}\, u \Rightarrow y' = -\,\text{cossec}^2 u.u'$
- se $y = \sec u \Rightarrow y' = \sec \text{u} \,.\text{tg}\, u \,.u'$
- se $y = \text{cossec}\, u \Rightarrow y' = -\,\text{cossec}\, u \,.\text{cotg}\, u \,.\, u'$

Se a função de fora f for uma função potência, isto é, $y = [g(x)]^n$, podemos escrever $y = f(u) = u^n$, em que $u = g(x)$. Usando a regra da cadeia e a regra da pontência, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1} g'(x)$$

Regra da potência combinada com a Regra da Cadeia

Se n for qualquer número real e $u = g(x)$ for derivável, então

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Alternativamente,

$$\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]^n = n\left[g(x)\right]^{n-1}.g'(x)$$

Exercício:

Encontre as derivadas:

a) $y = (x^3 - 1)^{10}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

c) $g(t) = \left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^9$

d) $y = (3x^2 + 1)^3(x - x^2)^2$

e) $f(x) = \text{sen}(\cos(\text{tg } x))$

f) $y = \cos(x^2+2x-1) - 3\text{sen } x$

g) $y = \text{sen}^2 x.\cos^3 x$

Derivada da função exponencial composta

Se $y = u^v$, em que $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções de x, deriváveis em um intervalo I e $u(x) > 0$, $\forall\ x \in$ I, então

$$\boxed{y' = v.\ u^{v-1}\ u' + u^v.\ \ln u.v'}$$

Se $y = e^u$, então

$$\boxed{y' = e^u\ u'}$$

Exercício:

1. Encontre as derivadas:

a) $y = 3^{2x^2+3x-1}$

b) $y = (\text{sen } x)^{\cos x}$

c) $y = e^{\text{sen } x}$

2. Se $f(x) = e^{x/2}$, calcule $f^{n}(x)$.

Derivada da função logarítmica composta

Se $y = \log_a u \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$, em que $u = u(x)$, então:

$$\boxed{y' = \frac{1}{u.\ln a} u'}$$

Se $y = \ln u$, em que $u = u(x)$, então

$$\boxed{y' = \frac{1}{u} u'}$$

Exercício:

Encontre as derivadas:

a) $y = \log_3(\text{sen } x)$

b) $f(x) = \text{sen } x . \ln x$

c) $y = (\ln x)^2$

d) $y = e^x \ln x$

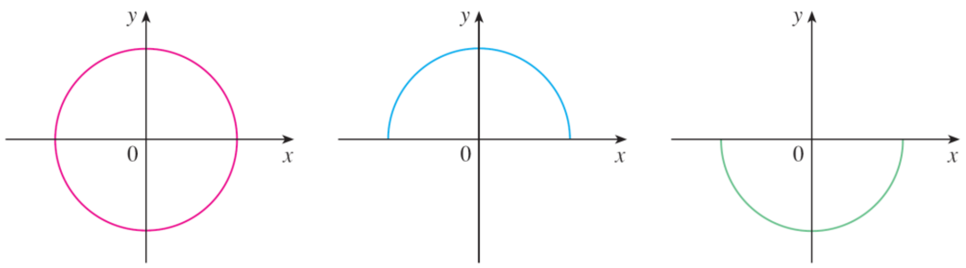
e) $y = e^{x \ln x}$

Diferenciação Implícita

Sempre que temos uma função escrita na forma $y = f(x)$, dizemos que y é uma **função explícita** de x, pois podemos isolar a variável dependente de um lado e a expressão da função do outro. Porém nem sempre isso é possível ou conveniente e, caso isso ocorra, dizemos que y é uma ***função implícita*** de x.

Considere, por exemplo, a equação $y = 2x^2 - 3$. Note que y é uma função explícita de x, pois podemos escrever $y = f(x)$, em que $f(x) = 2x^2 - 3$. A equação implícita $4x^2 - 2y = 6$ define a mesma função, pois, isolando y obtemos $y = 2x^2 - 3$. Entretanto, em alguns casos, a equação pode definir funções implícitas.

Seja $x^2 + y^2 = 25$. Neste caso, temos que $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Logo, duas das funções determinadas pela equação implícita são $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ e $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$.



(a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

Derivada da função implícita

A derivada da função implícita consiste na derivação de ambos os lados da equação em relação a x e, então, na resolução da equação para y'.

Suponha que $f(x, y) = 0$ define implicitamente uma função derivável $y = f(x)$. Utilizando a regra da cadeia, podemos determinar y' sem explicitar y.

Exercícios:

a) Dada a equação $4x^2 - 2y = 6$, determine $y'(x)$.

b) Derive a equação $x^2 y + 2y^3 = 3x + 2y$.

c) $e^{xy} + \ln(x + y) = 1 + \operatorname{sen} x$

d) Seja $(x_0, y_0) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da equação $x^2 + y^2 = 4$.

Derivada da função inversa

Seja $y = f(x)$ uma função invertível definida em um intervalo (a, b) e seja $x = g(y)$ sua inversa. Se $f'(x)$ existe e é diferente de zero para qualquer $x \in (a, b)$, então $g = f^{-1}$ é derivável e definida como:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[g(y)]}$$

Exercícios:

Calcule a função inversa e sua respectiva derivada e também a derivada da função inversa:

a) $y = 4x - 3$

b) $y = \log_3 x$

Derivada das funções trigonométricas inversas

A derivação implícita pode ser usada para determinar as derivadas das funções trigonométricas inversas.

Função arco seno

Seja por $y = \text{arcsen } x = \text{sen}^{-1}x$. Isso significa que $\text{sen } y = x$ e $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Derivando $\text{sen } y = x$ implicitamente em relação a x obtemos:

$$\cos y \; y' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{1}{\cos y}$$

Como $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, $\cos y \ge 0$, logo:

$$\cos y = \sqrt{1 - sen^2 y} = \sqrt{1 - x^2} \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Portanto, $y = sen^{-1}x$ é derivável e $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

De forma análoga, temos as derivadas das demais funções trigonométricas inversas:

- se $y = cos^{-1}x \;\; \Rightarrow \;\; y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- se $y = tg^{-1}x \;\; \Rightarrow \;\; y' = \frac{1}{1+x^2}$
- se $y = cotg^{-1}x \;\; \Rightarrow \;\; y' = -\frac{1}{1-x^2}$
- se $y = sec^{-1}x \;\; \Rightarrow \;\; y' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$
- se $y = cossec^{-1}x \;\; \Rightarrow \;\; y' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$

Para as funções trigonométricas inversas compostas, temos as seguintes derivadas:

- Se $y = arcsen\ u \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$
- Se $y = arccos\ u \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$
- Se $y = arctg\ u \Rightarrow y' = \frac{1}{1+u^2}.u'$
- Se $y = arccotg\ x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{1+u^2}.u'$
- Se $y = arcsec\ u$, $|u| \geq 1 \Rightarrow y' = \dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}.u'$, $|u| > 1$
- Se $y = arccossec\ u$, $|u| \geq 1 \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}.u'$, $|u| > 1$

Exercício:

Determine a derivada:

a) $y = arcsen(x + 1)$

b) $y = arctg\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

Derivada das funções hiperbólicas

As funções hiperbólicas são definidas em termos das funções exponenciais.
Se $y = senh\, x$, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{2\left(e^x - e^{-x}(-1)\right) - (e^x - e^{-x})\,0}{4} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

Similarmente, obtemos as derivadas das demais funções hiperbólicas:

- $y = senh\, u \quad \Rightarrow \quad y' = cosh\, u \, .\, u'$
- $y = cosh\, u \quad \Rightarrow \quad y' = senh\, u \, .\, u'$
- $y = tgh\, u \quad \Rightarrow \quad y' = sech^2\, u \, .\, u'$
- $y = cotgh\, u \quad \Rightarrow \quad y' = -\, cossech^2\, u \, .\, u'$
- $y = sech\, u \quad \Rightarrow \quad y' = -\, sech\, u.\ tgh\, u \, .\, u'$
- $y = cossech\, u \quad \Rightarrow \quad y' = -\, cossech\, u.\ cotgh\, u \, .\, u'$

Exercício:

Determine a derivada das funções hiperbólicas:

a) $y = senh(x^3 + 3)$

b) $y = ln(tgh(3x))$

Derivada das funções hiperbólicas inversas

As funções hiperbólicas inversas são todas deriváveis, pois as funções hiperbólicas são deriváveis.

- Se $y = argsenh\, u \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}} . u'$
- Se $y = argcosh\, u \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}} . u', u > 1$
- Se $y = argtgh\, u \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1-u^2} . u', |u| < 1$

- Se y = *argcotgh u* $\Rightarrow y' = \dfrac{-1}{1-u^2}.u', |u|>1$
- Se y =*argsech u* $\Rightarrow y' = -\dfrac{1}{u\sqrt{1-u^2}}.u', 0<u<1$
- Se y =*argcossech u* $\Rightarrow y' = -\dfrac{1}{|u|\sqrt{1+u^2}}.u', u \neq 0$

Exercício:

Determine a derivada:

a) $y = x^2 argcosh\ x^2$

b) $y = x\, argsenh\ x - \sqrt{x^2+1}$

Derivada de funções na forma paramétrica

Sejam

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{1}$$

duas funções da mesma variável $t \in [a,b]$. Tomando x e y como as coordenadas de um ponto P, podemos dizer que a cada valor de t, corresponde um ponto do plano xy. Se as funções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são contínuas quando t varia de a a b, o ponto $P(x(t), y(t))$ descreve uma curva no plano. As equações dadas em (1) são chamadas **equações paramétricas** da curva e t é chamado **parâmetro**.

Se a função $x = x(t)$ admite uma inversa $t = t(x)$, podemos escrever $y = y(t) = y(t(x))$. Neste caso, dizemos que as equações dadas em (1) definem y como uma função de x na forma paramétrica. Eliminando o parâmetro t nas equações (1), podemos obter $y = y(x)$ na forma analítica usual.

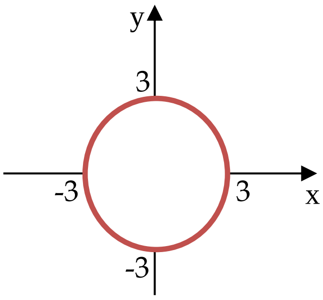
Exercício:

As equações $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t + 3 \end{cases}$ definem uma função $y(x)$ na forma cartesiana?

Muitas curvas importantes costumam ser representadas na forma paramétrica.

Exercício:

Determine a equação cartesiana representada pela função: $\begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = 3sen(t) \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$



Quando t varia de 0 a 2π a função $x(t) = 3\cos(t)$ não admite inversa, uma vez que não é bijetora neste intervalo. No entanto, podemos restringir o domínio desta função convenientemente, a fim de obter uma inversa $t = t(x)$.

Por exemplo, quando $t \in [0, \pi]$, a equação apresentada no exemplo define a função $y = \sqrt{9 - x^2}$ e quando $t \in [\pi, 2\pi]$, a equação define a função $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

Derivada da função na forma paramétrica

Seja $y = f(x)$ dada na forma paramétrica por: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [a, b]$. Se as funções $y = y(t)$, $x = x(t)$ e $t = t(x)$ são deriváveis e $x = x(t)$ admite inversa $t = t(x)$, podemos ver a função $y = y(x)$ como uma função composta:

$$y = y(t) = y(t(x))$$

Aplicando a regra da cadeia:

$$y'(x) = y'(t)t'(x) = y'(t)\frac{1}{x'(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Exercício:

Calcule a derivada das funções definidas na forma paramétrica por:

a) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 9t^2 - 6t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4sen^3 t \end{cases}$

Regra de L'Hôspital

Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções contínuas e $f(a) = g(a) = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ não pode ser encontrado com a substituição $x = a$. Muitas vezes, limites deste tipo podem ser calculados por cancelamento, rearranjo de termos ou outros tipos de manipulações algébricas. Outras vezes, não é possível seu cálculo através dos métodos vistos anteriormente.

Em geral, se tivermos um limite da forma $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ em que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$, então esse limite pode não existir e é chamado **forma indeterminada** do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Outra situação ocorre quando temos um limite da forma $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, em que $f(x) \to \pm\infty$ e $g(x) \to \pm\infty$ quando $x \to a$, então esse limite pode não existir e é chamado **forma indeterminada** do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

A *Regra de L'Hôspital* é um método geral para o cálculo de limites que envolvem formas indeterminadas, mesmo quando não é possível o cálculo do limite através de manipulações algébricas.

Regra de L'Hôspital

Sejam f e g funções deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

(i) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

(ii) Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

OBS: A *Regra de L'Hôspital* também válida para limites laterais e para limites no infinito ou infinito negativo ($x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to\infty$ ou $x\to-\infty$).

Exercício:

Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2} =$

e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^3+4x}$

f) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

Produtos indeterminados

Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ então $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ pode não existir e é chamado **forma indeterminada** do tipo 0.∞. Para trabalhar com esta indeterminação, escrevemos o produto *fg* como o quociente: $fg = \frac{f}{1/g}$ ou $fg = \frac{g}{1/f}$

Exercícios:

1) Calcule $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$

2) Calcule $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) \ln x$

Diferenças indeterminadas

Se $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ então o limite $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$ é chamado **forma indeterminada** do tipo ∞ **-** ∞.

Para trabalhar com esta indeterminação, tentamos converter a diferença, por exemplo, em um quociente usando um denominador comum ou racionalização, ou colocando em evidencia um fator em comum de modo a obter a indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Exercício:

Calcule $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - tgx)$

Potências indeterminadas

Várias potências indeterminadas surgem do limite $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$.

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo 0^0

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \text{ e } \lim_{x\to a} g(x)=0 \qquad \text{tipo } \infty^0$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=1 \text{ e } \lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty \qquad \text{tipo } 1^\infty$$

Cada um desses casos pode ser tratado tanto por tomar o logaritmo natural:

seja $y = \lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, então $\ln y = g(x) \ln f(x)$

quanto escrevendo a função como uma exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Exercícios:

1) Calcule $\lim_{x\to 0^+} (1+sen 4x)^{\text{cotg}x}$

2) Mostre que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Seja $L=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln L = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] =$

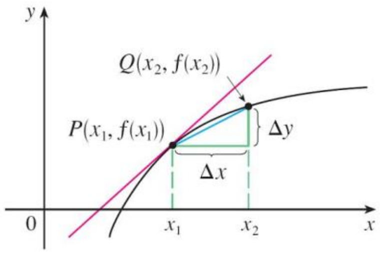
$$\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1} = 1.$$

Portanto, $\ln L = 1 \Rightarrow L = e^1 = e$. Logo, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Aplicações da Derivada

Taxa de variação

Se $y = f(x)$, então a derivada dy/dx pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x. Sabemos que se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x será $\Delta x = x_2 - x_1$ e a variação correspondente em y será $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. O quociente da diferença $\Delta y/\Delta x$ é a **taxa média de variação de y em relação a x** sobre o intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretada como a inclinação *da reta secante PQ*.



m_{PQ} = a taxa de variação média $m = f\,'(x_1)$ = taxa instantânea de variação

De forma equivalente, quando a variável independente varia de x a $x+\Delta x$ a correspondente variação de y será $\Delta x = f(x+\Delta x) - f(x)$. Desta forma, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ é a ***taxa média de variação*** de y em relação a x.

Seu limite quando $\Delta x \to 0$ é a derivada da função que pode ser interpretada como a **taxa instantânea de variação de *y* em relação a *x*** ou a inclinação da reta tangente em $P\,(x_1, f\,(x_1))$. Escrevemos o processo na forma: $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Exercícios:

1. Se daqui a t anos o número N de pessoas que utilizarão a internet em determinada comunidade for dado por $N(t) = 10t^2 + 30t + 15000$, determine:
   a. O número de pessoas que utilizarão a internet daqui a 2 anos nessa comunidade.
   b. A taxa de variação do número de pessoas que utilizarão a internet daqui a 2 anos.

2. Uma cidade X é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é dado, aproximadamente, por $f(t) = 64t - \dfrac{t^3}{3}$.
   a) Qual a taxa da expansão da epidemia após 4 dias?
   b) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no 5º dia?

Se $s = f(t)$ for a função posição de uma partícula que está se movendo em uma reta, então $\Delta s/\Delta t$ representa a velocidade média ao longo de um período de tempo Δt, e $v = ds/dt$ representa a **velocidade** instantânea (a taxa de variação do deslocamento em relação ao tempo). A taxa instantânea de variação da velocidade com relação ao tempo é a **aceleração**: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Exercício:

A posição de uma partícula é dada pela equação $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, em que t é medido em segundos e s, em metros.

a) Encontre a velocidade no tempo t.
b) Qual a velocidade depois de 2 s?
c) Quando a partícula está em repouso?
d) Quando a partícula está se movendo para a frente (isto é, no sentido positivo)?
e) Encontre a aceleração no tempo t e depois de 4 s.

Se o custo total de produção e comercialização de q unidades de um produto é dado por $C = C(q)$, então se aumentarmos a produção de q para $q + \Delta q$, o acréscimo correspondente no custo total será dado por $\Delta C = C(q + \Delta q) - C(q)$. A **taxa média de variação do custo** será $\dfrac{\Delta C}{\Delta q} = \dfrac{C(q+\Delta q) - C(q)}{\Delta q}$.

O **custo marginal** (*CM)* representa a taxa de variação instantânea do custo total por unidade de variação da quantidade produzida quando esta se encontra em um nível q e é definido por $CM(q) = \lim\limits_{\Delta q \to 0} \dfrac{C(q+\Delta q) - C(q)}{\Delta q} = C'(q)$.

Exercícios:

1. Suponha que o custo, em dólares, para uma companhia produzir x novas linhas de jeans é $C(x) = 2000 + 3x + 0{,}01x^2 + 0{,}0002\,x^3$. Qual será o custo para a produção de 100 novas linhas de jeans.

2. Supondo que o custo total de uma empresa que produz q unidades de um produto, no período de um mês, seja dada por:

$$C(q) = \begin{cases} 100 + 2q, & 0 \le q \le 600 \\ 1300 + \sqrt{q - 600}, & 600 < q \le 1500 \\ 1330 + (q - 1500)^2, & q > 1500 \end{cases}$$

Determine o custo marginal para q = 1000.

Teorema do Valor Médio

Seja f uma função que satisfaz as seguintes hipóteses:

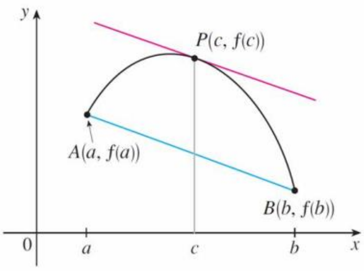
1. f é contínua no intervalo fechado [a, b].
2. f é derivável no intervalo (a, b).

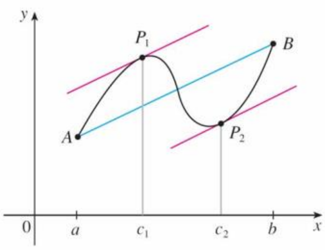
Então existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ou, de maneira equivalente,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

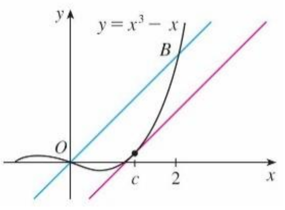
Graficamente, o TVM diz que há no mínimo um ponto $P(c, f(c))$ sobre o gráfico em que a inclinação da reta tangente é igual a inclinação da reta secante AB.





Exercícios:

1) Determine um ponto c em (0, 2) que satisfaça as condições do TVM para a função $f(x) = x^3 - x$.



2) Se $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$, mostre que f verifica as hipóteses do TVM no intervalo [-1, 4], e determine um número c em (-1, 4) que satisfaça a conclusão do teorema. Ilustre os resultados graficamente.

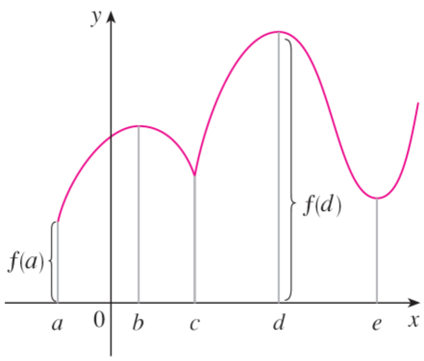
3) Se $f(x) = x^3 - 8x - 5$, mostre que f verifica as hipóteses do TVM no intervalo [-1, 4], e determine um número c em (-1, 4) que satisfaça a conclusão do teorema. Ilustre os resultados graficamente.

4) Seja f uma função contínua e suponha que $f(0) = -3$ e $f'(c) \leq 5$ para todos os valores de x. Quão grande $f(2)$ pode ser?

Máximos e Mínimos

Definição:

Uma função f definida em um intervalo I tem **máximo absoluto** (ou **máximo global**) em um ponto c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em D, em que D é o domínio de f. O número $f(c)$ é chamado **valor máximo** de f em D. Analogamente, f tem um **mínimo absoluto** em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D. O número $f(c)$ é denominado **valor mínimo** de f em D. Os valores máximo e mínimo de f são chamados **valores extremos** de f.



No gráfico, a função f possui um **máximo absoluto** em d e **mínimo absoluto** em a, pois, $(d, f(d))$ é o ponto mais alto no gráfico e $(a, f(a))$ é o menor ponto. Porém, se considerarmos apenas os valores de x próximos b [por exemplo, o intervalo (a, c)], então $f(b)$ é o maior destes valores de $f(x)$ e é chamado de *valor máximo local* de f.

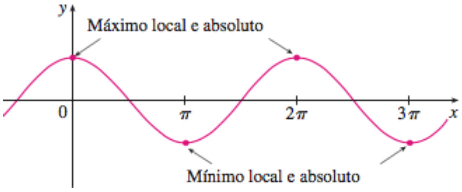
Da mesma forma, $f(c)$ é chamado de *valor mínimo local* de f, pois $f(c) \leq f(x)$ para x próximo de c [n intervalo (b, d), por exemplo]. A função f também tem um *mínimo local* em e.

Definição:

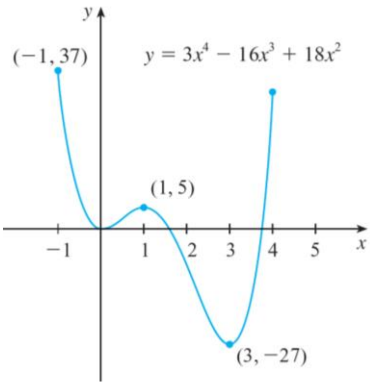
Uma função f tem um **máximo local** (ou **máximo relativo**) em c, se existir um intervalo aberto I contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in$ I. Analogamente, a função f tem um **mínimo local** (ou **mínimo relativo**) em c, se existir um intervalo aberto I contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in$ I.

Exercícios:

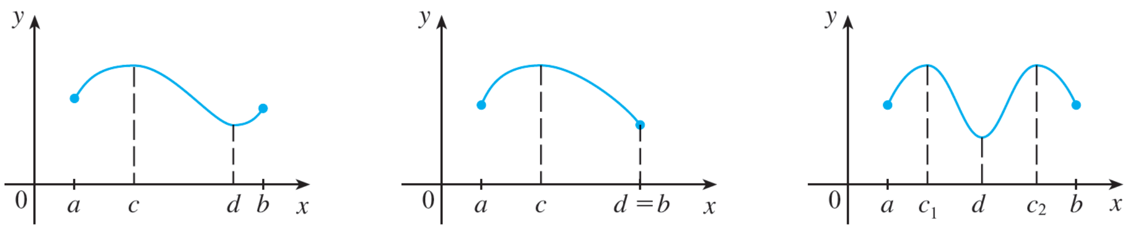
1. Determine os pontos de máximo e mínimo (local e absoluto) da função $f(x) = \cos(x)$.



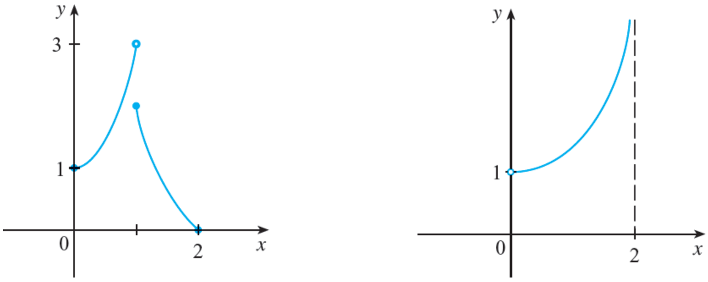
2. Determine os pontos de máximo e mínimo (local e absoluto) da função f definida por $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, para $-1 \leq x \leq 4$.



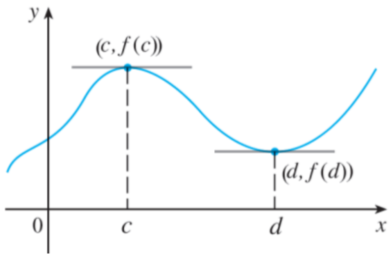
Teorema do Valor Extremo (TVE): Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.



Uma função pode não possuir valores extremos se for omitida uma das duas hipóteses (continuidade ou intervalo fechado) do Teorema do Valor Extremo.



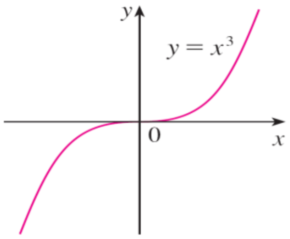
De acordo com o TVE uma função contínua em um intervalo fechado tem um valor máximo e um mínimo. Para obter esses valores, consideraremos uma função f com máximo local em c e mínimo local em d.



Nos pontos de máximo e de mínimo as retas tangentes são horizontais e, portanto, cada uma tem inclinação 0. Como a derivada é a inclinação da reta tangente, temos que $f'(c) = 0$ e $f'(d) = 0$. O teorema de Fermat afirma que isso é sempre verdadeiro para as funções diferenciáveis.

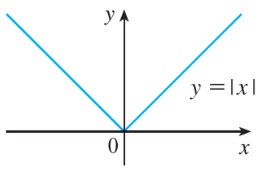
Teorema de Fermat:
Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Observação: A recíproca do teorema de Fermat não é verdadeira, ou seja, $f'(c) = 0$ não implica que c seja um extremo de f. O exemplo mais simples que ilustra este fato é a função $f(x) = x^3$.



Se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2$, logo, $f'(0) = 0$. Porém, f não tem máximo nem mínimo em 0. O fato de $f'(0) = 0$ simplesmente significa que a curva $y = x^3$ tem uma reta tangente horizontal em (0, 0). Em vez de ter máximo ou mínimo em (0, 0), a curva cruza sua tangente horizontal nesse ponto.

A função $f(x) = |x|$ tem seu valor mínimo (local e absoluto) em 0; contudo, esse valor não pode ser encontrado tomando $f'(x) = 0$, pois $f'(0)$ não existe.



Desta forma, devemos procurar valores extremos de f nos números c em que $f'(c) = 0$ ou em que $f'(c)$ não existe. Esses números têm um nome especial.

Definição: Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f em que ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Exercício:
Encontre os números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

Um ponto crítico pode ser ou não um ponto extremo. Porém, uma condição necessária para a existência de um extremo em um ponto c é que c seja um **ponto crítico**. Portanto, para encontrarmos um máximo ou um mínimo absoluto de uma função contínua f em um intervalo fechado [a, b], fazemos:

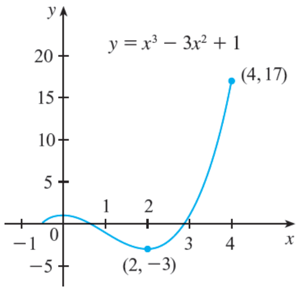
1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b).

2. Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo.

3. O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto e o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

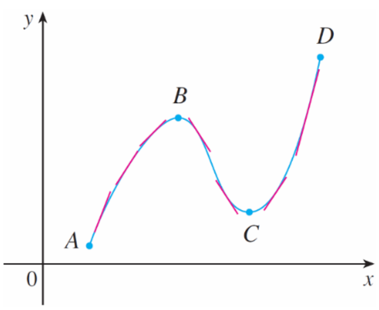
Exercício:

Encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, no intervalo $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$.



Análise do comportamento de $f(x)$ a partir de $f'(x)$

A derivada de uma função, $f'(x)$, representa a inclinação da curva $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$. Desta forma, ela nos informa para qual direção a curva segue em cada ponto. Assim, é razoável esperar que a derivada de f nos forneça informações sobre os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.



Entre A e B e entre C e D, as retas tangentes têm inclinação positiva e, portanto, $f'(x) > 0$.
Entre B e C, as retas tangentes têm inclinação negativa e, portanto, $f'(x) < 0$.
Portanto, f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa.

Teste crescente/decrescente: Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).

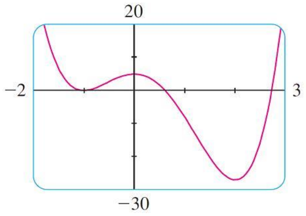
i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$;

ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Exercício:

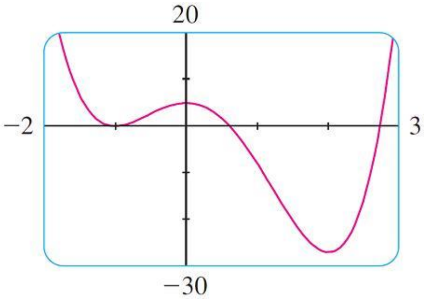
Encontre os intervalos nos quais as funções são crescentes ou decrescentes.

a. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$



b. $f(x) = x^3 + 1$

A análise do intervalo em que uma função é crescente ou decrescente nos permite verificar os pontos críticos da função. Para que f tenha um máximo ou mínimo local em c, então c deve ser um número crítico de f, porém, nem todo número crítico dá origem a um máximo ou mínimo. Consequentemente, necessitamos de um teste que nos diga se f tem ou não um máximo ou mínimo local em um número crítico.



No gráfico, $f(0) = 5$ é um valor máximo local de f, pois f cresce em $(-1, 0)$ e decresce em $(0, 2)$. Em termos de derivadas, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ e $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$. Em outras palavras, o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em 0.

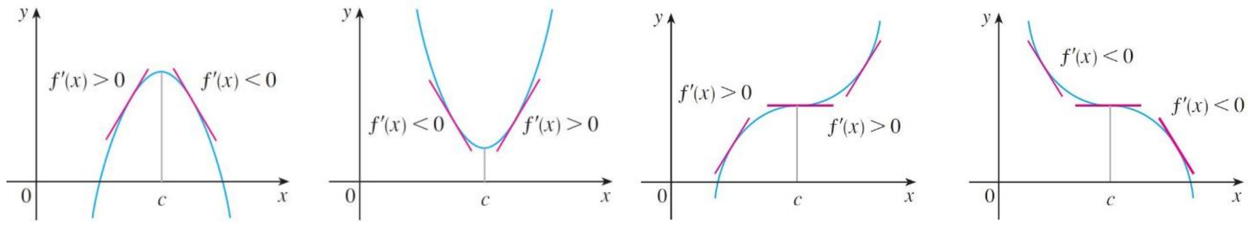
Teste da derivada primeira

Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$, que possui derivada em todo ponto do intervalo aberto (a, b), exceto possivelmente num ponto c.

i. Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ **e** $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.

ii. Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ **e** $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

iii. Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ **e** $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, ou $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ **e** $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f não tem máximos ou mínimos locais em c.



Máximo local | Mínimo local | Nem máximo, nem mínimo | Nem máximo, nem mínimo

Exercícios:

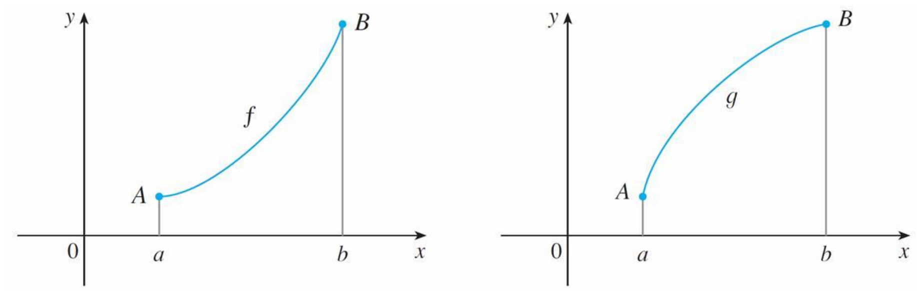
1. Encontre os valores máximos e mínimos locais da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

2. Encontre os intervalos de crescimento, decrescimento, máximos e mínimos locais da função $f(x) = x^3 - 7x + 6$.

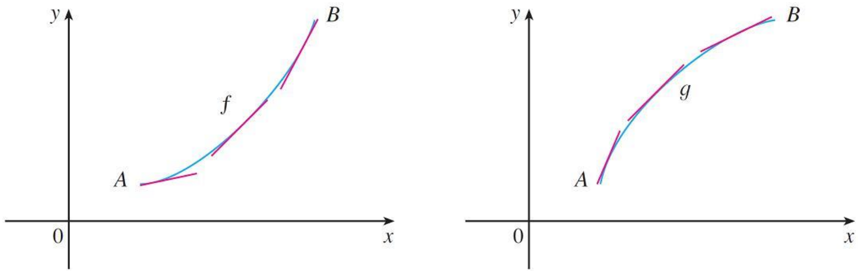
Análise do comportamento de $f(x)$ a partir de $f''(x)$

O teste da derivada primeira nos informa as regiões do domínio em que a função cresce e decresce, porém, não diz de que modo isso ocorre, ou seja, não diz nada sobre a curvatura do gráfico, o qual pode ser côncavo para baixo, para cima, ou reto, por exemplo. Quem fornece estas informações é a segunda derivada da função.

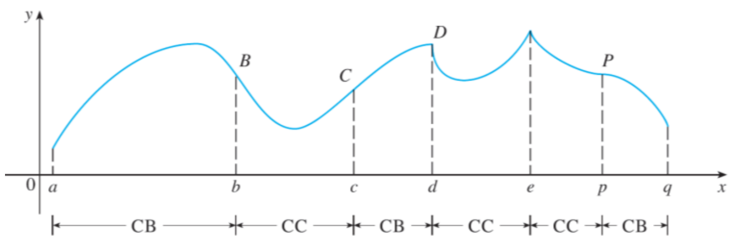
Os gráficos a seguir mostram duas funções crescentes em (a, b). Ambos unem o ponto A ao B, mas eles são diferentes, pois se inclinam em direções diferentes.



As tangentes a essas curvas foram traçadas em vários pontos. No primeiro gráfico, a curva fica acima das tangentes e *f* é chamada *côncava para cima* em (a, b). No segundo, a curva está abaixo das tangentes e *g* é chamada *côncava para baixo* em (a, b).



No gráfico a seguir, a função é côncava para cima (abrevia-se CC) nos intervalos (*b, c*), (*d, e*) e (*e, p*), e côncava para baixo (CB) nos intervalos (*a, b*), (*c, d*) e (*p, q*).



Teste da concavidade

Seja *f* uma função derivável (pelo menos até a segunda derivada) em um intervalo *I*.

i. Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de *f* é **côncavo para cima** em *I*.
ii. Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de *f* é **côncavo para baixo** em *I*.

Ainda com relação ao gráfico anterior, nos pontos B, C, D e P a curva $y = f(x)$ muda a direção de sua concavidade. Esses pontos rebem o nome de *pontos de inflexão*.

Definição: Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva muda a concavidade nesse ponto.

Exercícios:

1. Determine os pontos de inflexão e os intervalos em que a função $f(x) = x^3 - 7x + 6$ tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

2. Esboce um gráfico possível de uma função f que satisfaça as seguintes condições:

i) $f'(x) > 0$ em $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ em $(1, \infty)$
ii) $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ em $(-2, 2)$
iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

Outra aplicação da segunda derivada é o teste para os valores máximos e mínimos. Este teste é uma consequência do Teste da concavidade.

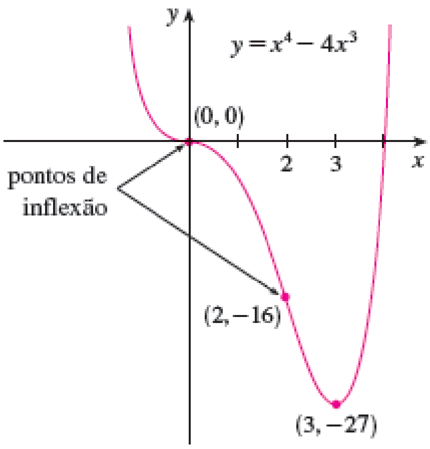
Teste da derivada segunda

Suponha que f'' seja contínua na proximidade do ponto crítico c.

i. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.
ii. ii) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

Exercício:

1. Examine a curva $y = x^4 - 4x^3$ em relação à concavidade, aos pontos de inflexão e mínimos e máximos locais. Use essa informação para esboçar a curva.



Observação: O Teste da segunda derivada é inconclusivo quando $f''(c) = 0$. Em outras palavras, esse ponto pode ser um máximo, um mínimo ou nenhum dos dois (Exercício 1). Esse teste também falha quando $f''(c)$ não existe. Em tais casos, o Teste da primeira derivada deve ser usado.

Exercício:

Utilize as informações referentes a concavidade, pontos de inflexão, máximos e mínimos locais para esboçar o gráfico da função $f(x) = 6x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3$.

Resumo e roteiro para o esboço de curvas

Utilizando os itens citados na análise de uma função, podemos fazer um resumo de atividades que nos levarão ao esboço de gráficos. Nem todos os itens são relevantes para cada função. No entanto, o roteiro fornece todas as informações necessárias para fazer um esboço que mostre os aspectos mais importantes da função.

Informações úteis	Descrição
1º – Domínio de f	É frequentemente útil começar determinando o domínio D de f, isto é, o conjunto dos valores de x para os quais $f(x)$ está definida.
2º – Intersecção com os eixos	A intersecção com o eixo y é $f(0)$. Para encontrarmos as intersecções com o eixo x, fazemos $y = 0$ e isolamos x. (fazer este passo quando não for necessário muito cálculo)
3º – Simetria	Se $f(-x) = f(x)$ para todo x em D, então f é uma **função par**, e a curva é simétrica em relação ao eixo y. Se $f(-x) = -f(x)$ para todo x em D, então f é uma **função ímpar** e a curva é simétrica em relação à origem.
4º – Assíntotas	*Assíntotas horizontais.* Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, então a linha $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$. *Assíntotas verticais.* A reta $x = a$ é uma assíntota vertical se pelo menos uma das seguintes afirmativas for verdadeira: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

5º – Intervalos de Crescimento ou Decrescimento	Calcule $f'(x)$ e encontre os intervalos nos quais $f'(x)$ é positiva (f é crescente) e os intervalos nos quais $f'(x)$ é negativa (f é decrescente).
6º – Pontos críticos	Encontre os números críticos de f, números c nos quais $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.
7º – Valores Máximos e Mínimos Locais	Teste da Primeira Derivada: Se f' mudar de positiva para negativa em um número crítico c, então $f(c)$ é o máximo local. Se f' mudar de negativa para positiva em c, então $f(c)$ é um mínimo local. Teste da Segunda Derivada: Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) \neq 0$, então $f''(c) > 0$ implica que $f(c)$ é um mínimo local. Se $f''(c) < 0$, então $f(c)$ é um máximo local.
8º – Concavidade e Ponto de Inflexão	Teste da Concavidade: A curva é côncava para cima se $f''(x) > 0$, e côncava para baixo se $f''(x) < 0$. Os pontos de inflexão ocorrem quando muda a direção da concavidade.
9º – Esboço da curva	Usando os passos 1° – 8° faça o gráfico. Coloque as assíntotas como linhas tracejadas. Marque as intersecções com os eixos, os pontos de máximo e de mínimo e os pontos de inflexão. Faça a curva passar por esses pontos, subindo ou descendo, com concavidade de acordo com o passo 8º.

Exercícios:

1. Esboçar os gráficos das funções abaixo:

   a) $f(x) = x^2 + x - 2$.

b) $f(x) = \dfrac{2x^2}{9 - x^2}$

c) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$

2. Esboce o gráfico das funções que tenham as seguintes características:

a)
$$\begin{aligned} & f(0) = 0; \\ & f'(x) < 0 \quad se \quad x < -1 \quad ou \quad x > 3/2 \\ & f'(x) > 0 \quad se \quad -1 < x < 3/2 \\ & f'(-1) = f'(3/2) = 0 \\ & f''(x) < 0 \quad se \quad x > 0{,}25 \\ & f''(x) > 0 \quad se \quad x < 0{,}25 \end{aligned}$$

b) $f'(x) > 0$ para $x < -1$ e $x > 3$
$f'(x) < 0$ para $-1 < x < 3$
$f''(x) < 0$ para $x < 2$
$f''(x) > 0$ para $x > 2$

Problemas de Otimização

Quando estudamos problemas de otimização determinamos valores máximos e/ou mínimos absolutos das funções que os representam. São chamados de problemas de otimização pelo fato de que as soluções encontradas com esta técnica são as melhores possíveis para cada caso, ou seja, resolver estes problemas com as técnicas de máximos e mínimos significa encontrar a solução ótima para eles.

Problema 1: Durante várias semanas, o departamento de trânsito de uma certa cidade vem registrando a velocidade dos veículos que passam por um certo cruzamento. Os resultados mostram que entre 13 e 18 horas, a velocidade média neste cruzamento é dada aproximadamente por $v(t) = t^3 - 10{,}5\, t^2 + 30\, t + 20$ km/h, onde t é o número de horas após o meio-dia. Qual o instante, entre 13 e 18 horas, em que o trânsito é mais rápido? E qual o instante em que ele é mais lento?

Problema 2: Um fazendeiro tem 2400 metros de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa cercar ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

Problema 3: Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de 900m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3.000m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R$ 5,00 o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa R$ 4,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico para estender o cabo?

Problema 4: Deve-se construir uma caixa retangular com uma folha de cartolina de 40 cm de largura e 52 cm de comprimento, retirando-se um quadrado de cada canto dobrando-se perpendicularmente os lados restantes. Determine o lado do quadrado que se vai retirar para que a caixa tenha volume máximo.