OTIMIZAÇÃO LINEAR

Profª : Adriana Cherri
adriana.cherri@unesp.br

wwwp.fc.unesp.br/~adriana

MODELO DE OTIMIZAÇÃO LINEAR

$$\boxed{minimizar\ \ f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n}$$ *Função objetivo*

Sujeito a:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &+ \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &+ \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &+ \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\
&\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &+ \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

Restrições (≤ ou ≥)

$$\boxed{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0}$$ *Condição de não-negatividade*

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaz todas as restrições é chamado de solução factível.

PROBLEMAS DE MISTURA

- Rações , Vitaminas (mistura de alimentos);
- Ligas Metálicas (mistura de insumos metálicos);
- Composição de areia para filtro (mistura de areias).

PROBLEMAS DE MISTURA

- Mistura produzida a partir de ingredientes que possuem os componentes desejados no novo produto, satisfazendo determinadas especificações.

- Componentes e Custos de cada ingrediente devem ser conhecidos.

OBJETIVO: determinar as quantidades de cada ingrediente que será utilizada para obter uma mistura com a composição especificada e com o menor custo possível.

PROBLEMA DA RAÇÃO

- Uma agroindústria deve produzir um tipo de ração para um determinado animal. A ração é produzida pela mistura de farinhas de 3 ingredientes básicos: farinhas de osso, de soja e de peixe.

- Cada um dos ingredientes contém diferentes quantidades de dois nutrientes necessários para uma dieta nutricional balanceada: proteína e cálcio.

- O nutricionista específica as necessidades **mínimas** desses nutrientes em 1 kg de ração.

PROBLEMA DA RAÇÃO

- Cada ingrediente é adquirido no mercado com um certo custo unitário

- **Objetivo:** Determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir 1 kg de ração que satisfaça às restrições nutricionais com o **mínimo custo**.

DADOS DO PROBLEMA

	Ingredientes			
Nutrientes	Osso	Soja	Peixe	Ração
Proteína	0,2	0,5	0,4	0,3
Cálcio	0,6	0,4	0,4	0,5
Custos ($/kg)	0,56	0,81	0,46	

Variáveis de decisão (1 kg de mistura)

x_{osso} : quantidade de farinha de osso
x_{soja} : quantidade de farinha de soja
x_{peixe} : quantidade de farinha de peixe

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Custo da mistura

$$f(x_{osso}, x_{soja}, x_{peixe}) = 0{,}56\, x_{osso} + 0{,}81\, x_{soja} + 0{,}46\, x_{peixe}$$

Quantidade de proteína (1 kg de mistura)

$$0{,}2x_{osso} + 0{,}5\, x_{soja} + 0{,}4\, x_{peixe} \geq 0{,}3$$

Quantidade de cálcio (1 kg de mistura)

$$0{,}6x_{osso} + 0{,}4\, x_{soja} + 0{,}4\, x_{peixe} \geq 0{,}5$$

Soma dos ingredientes: 1 kg de mistura

$$x_{osso} + x_{soja} + x_{peixe} = 1$$

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Modelo Completo

$$min\ f(x_{osso}, x_{soja}, x_{peixe}) = 0{,}56\ x_{osso} + 0{,}81\ x_{soja} + 0{,}46\ x_{peixe}$$

Sujeito a:

$$0{,}2\ x_{osso} + 0{,}5\ x_{soja} + 0{,}4\ x_{peixe} \geq 0{,}3$$

$$0{,}6\ x_{osso} + 0{,}4\ x_{soja} + 0{,}4\ x_{peixe} \geq 0{,}5$$

$$x_{osso} + x_{soja} + x_{peixe} = 1$$

$$x_{osso} \geq 0;\ x_{soja} \geq 0;\ x_{peixe} \geq 0$$

Solução factível: $x_{osso} = 0{,}5$; $x_{soja} = 0{,}3$; $x_{peixe} = 0{,}2$

Função objetivo: $f(0{,}5;\ 0{,}3;\ 0{,}2) = 0{,}615$

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Modelo Completo

$$min\ f(x_{osso}, x_{soja}, x_{peixe}) = 0{,}56\ x_{osso} + 0{,}81\ x_{soja} + 0{,}46\ x_{peixe}$$

Sujeito a:

$$0{,}2\ x_{osso} + 0{,}5\ x_{soja} + 0{,}4\ x_{peixe} \geq 0{,}3$$

$$0{,}6\ x_{osso} + 0{,}4\ x_{soja} + 0{,}4\ x_{peixe} \geq 0{,}5$$

$$x_{osso} + x_{soja} + x_{peixe} = 1$$

$$x_{osso} \geq 0;\ x_{soja} \geq 0;\ x_{peixe} \geq 0$$

Solução ótima: $x_{osso} = 0{,}5;\ \ x_{soja} = 0;\ \ x_{peixe} = 0{,}5$

Função objetivo: $f(0{,}5;\ 0;\ 0{,}5) = 0{,}51$

PROBLEMA DA MISTURA

Formulação Geral

Dados

n : número de ingredientes;
m : número de componentes;
a_{ij} : fração do componente i no ingrediente j;
b_i : fração do componente i na mistura;
c_j : custo unitário do ingrediente j.

Variáveis de decisão:

x_j : quantidade do ingrediente j a ser usada em uma unidade da mistura.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Quantidade do componente 1 na mistura:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

$$minimizar\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Sujeito a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

PROBLEMA DE LIGAS METÁLICAS

- Uma metalúrgica deseja maximizar sua receita bruta.
- As quantidades proporcionais de cada material na mistura para a obtenção das ligas passíveis de fabricação, a disponibilidade de cada matéria prima (em toneladas) e os preços de venda por tonelada de cada liga estão na tabela.

	Liga 1	Liga 2	Disponibilidade
Cobre	0.5	0.2	16 ton
Zinco	0.25	0.3	11 ton
Chumbo	0.25	0.5	15 ton
Preço	3.000	5.000	

Construa um modelo matemático que maximize o lucro.

PROBLEMA DE LIGAS METÁLICAS

Variáveis de decisão

x_1 : quantidade produzida da liga 1 (em ton)
x_2 : quantidade produzida da liga 2 (em ton)

Função objetivo:

$$maximizar\ Z = 3000x_1 + 5000x_2$$

Restrições (Disponibilidade das matérias primas):

$$0{,}50x_1 + 0{,}2x_2 \leq 16 \qquad \text{(cobre)}$$

$$0{,}25x_1 + 0{,}3x_2 \leq 11 \qquad \text{(zinco)}$$

$$0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 \leq 15 \qquad \text{(chumbo)}$$

Todas as quantidades produzidas são não-negativas:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

PROBLEMA DE LIGAS METÁLICAS

Modelo linear – PL (Programa linear)

$$max\ Z = 3000x_1 + 5000x_2$$

$$\begin{aligned}
\text{Sa:}\quad & 0{,}50x_1 + 0{,}2x_2 \leq 16 && \text{(cobre)} \\
& 0{,}25x_1 + 0{,}3x_2 \leq 11 && \text{(zinco)} \\
& 0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 \leq 15 && \text{(chumbo)} \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

PROBLEMA DA DIETA

- Paula deseja balancear os alimentos que consume de forma a obter uma dieta alimentar que forneça diariamente toda a energia, proteína e cálcio que necessita. Seu médico recomendou que ela se alimente de forma a obter diariamente **no mínimo 2000 kcal de energia, 65g de proteína e 800 mg de cálcio**.
- Quanto de cada alimento Paula deve consumir para obter uma dieta que atenda a recomendação médica e que tenha o menor custo possível?
- O Valor nutritivo e o preço (por porção) de cada alimento a ser considerado na dieta é dado na tabela a seguir:

PROBLEMA DA DIETA

Tipo de alimento	Tamanho da porção	Energia (Kcal)	Proteína (g)	Cálcio (mg)	Preço por porção (centavos)
Arroz	100g	170	3	12	14
Ovos	2 un	160	13	54	13
Leite	273 ml	160	8	285	9
Feijão	260g	337	22	86	19

Variáveis de decisão ?

Custo da mistura ?

Restrições ?

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

$min\ f(x_a, x_o, x_l, x_f) = 14\ x_a + 13\ x_o + 9x_l + 19x_f$

Sujeito a:

$$170\ x_a + 160\ x_o + 160x_l + 337x_f \geq 2000$$

$$3\ x_a + 13\ x_o + 8x_l + 22x_f \geq 65$$

$$12\ x_a + 54\ x_o + 285x_l + 86x_f \geq 800$$

$$x_a \geq 0;\ x_o \geq 0;\ x_l \geq 0;\ x_f \geq 0$$

Solução ótima: $x_a = 0$; $x_o = 0$; $x_l = 12{,}5$; $x_f = 0$

Função objetivo: $f(0; 0; 12{,}5; 0) = 112{,}5$ centavos

ANÁLISE DA SOLUÇÃO

- O que dizer desta solução?

(x_1 : número de porções do alimento leite e uma porção de leite é igual a 237ml)

$$12.5 \times 237 = 2962.5 \text{ ml}$$

Apesar de ser a de menor custo, a dieta sugerida é composta por apenas um alimento em uma quantidade que não é adequada.

ANÁLISE DA SOLUÇÃO

- Paula consegue tomar esta quantidade de leite em uma refeição?
- Uma pergunta natural para fazer a Paula é: "*Quantas porções de leite você tomaria?*".
- Este diálogo fictício ilustra bem a necessidade de se avaliar as respostas que um modelo produz.
- No processo de construção de um modelo a fase de validação pode resultar em uma revisão do modelo proposto.
- A resposta da Paula à pergunta acima implica em impor um limite para o número de porções de leite a serem incluídas na dieta.

ANÁLISE DA SOLUÇÃO

- Novos elementos conhecidos passam a fazer parte do nosso modelo:
  - *número máximo de porções do leite.*
- Podemos prever que limitar apenas o consumo do leite pode gerar novas soluções que sugiram um consumo igualmente inaceitável dos demais alimentos.
- Para obter um modelo que reflita melhor a situação precisamos conhecer os limites máximos aceitáveis para o consumo de cada um dos alimentos.
- Obtendo de Paula estes dados, podemos representar matematicamente esta nova restrição impondo um limite superior para o valor das variáveis.

REFORMULAÇÃO DO MODELO

- Considerando que o limite máximo para o consumo de arroz, ovos, leite e feijão são 1, 2, 2, 3 respectivamente:

$$min\ f(x_a, x_o, x_l, x_f) = 14\ x_a + 13\ x_o + 9x_l + 19x_f$$

Sujeito a:

$$170\ x_a + 160\ x_o + 160x_l + 337x_f \geq 2000$$

$$3\ x_a + 13\ x_o + 8x_l + 22x_f \geq 65$$

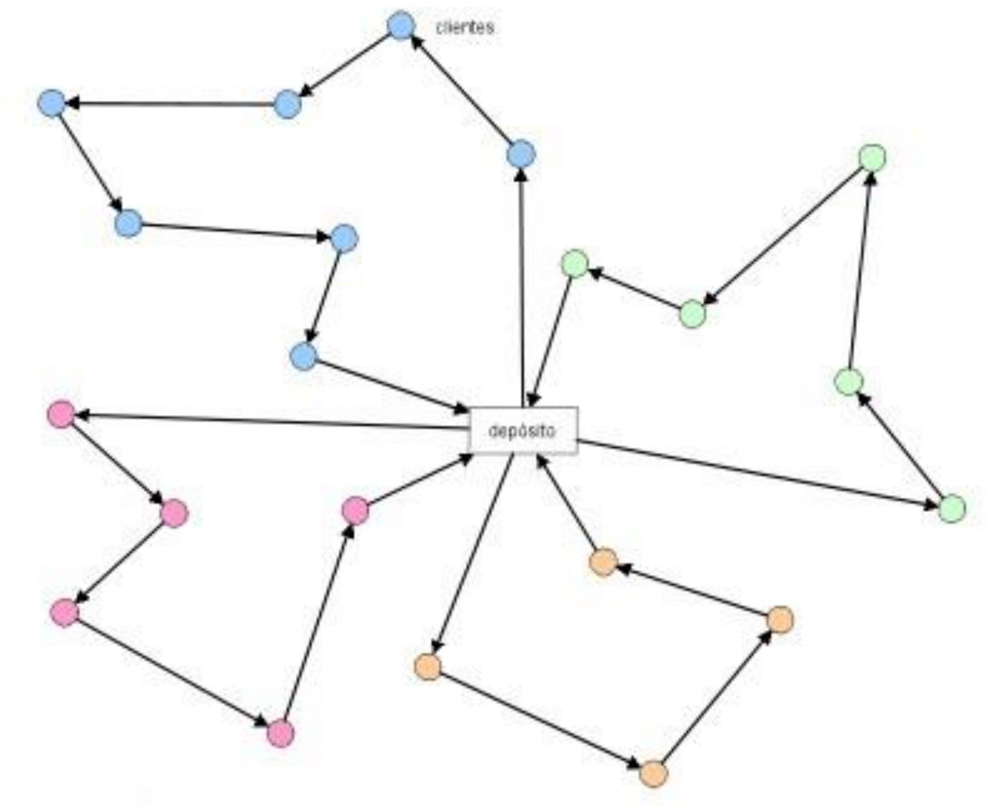
$$12\ x_a + 54\ x_o + 285x_l + 86x_f \geq 800$$

$$x_a \leq 1;\ x_o \leq 2;\ x_l \leq 2;\ x_f \leq 3$$

$$x_a \geq 0;\ x_o \geq 0;\ x_l \geq 0;\ x_f \geq 0$$

PROBLEMAS DE TRANSPORTE E TRANSBORDO

- Transporte de produtos dos centros de produção (origens) aos mercados consumidores (destinos);



PROBLEMAS DE TRANSPORTE E TRANSBORDO

- Quantidades disponíveis em cada centro de produção e as quantidades demandadas em cada mercado consumidor são conhecidas;
- O transporte deve ser efetuado respeitando-se as limitações de oferta em cada origem e atendendo à demanda de cada destino.

OBJETIVO: transportar o produto dos centros de produção aos mercados consumidores de modo que o custo total de transporte seja o menor possível.

PROBLEMAS DE TRANSPORTE E TRANSBORDO

- O problema surge em diversas situações:
  - Transporte de alimentos de indústrias aos mercados consumidores;
  - Transporte de pedras de centros de mineração para depósitos ao longo de uma rodovia em construção;
  - Designação de tarefas a máquinas;
  - Transporte de produção agrícola do campo até armazéns.

TRANSPORTE DE BEBIDAS

- Considere uma companhia distribuidora de bebidas que possui:
  - Dois centros de produção ($m = 2$): Araraquara e São José dos Campos;
  - Três mercados consumidores ($n = 3$): São Paulo, Belo Horizonte e Rio de Janeiro.

x_{ij}	qde do produto a ser enviada do centro i ao mercado j (uma unidade pode ser um engradado contendo dezenas de garrafas, ou um palete com centenas de garrafas)
c_{ij}	custo unitário do transporte de uma unidade de produto de cada centro de produção i a cada mercado consumidor j.

TRANSPORTE DE BEBIDAS

Os custos de custos de transporte, demandas e capacidades de produção são dados abaixo

Centro de suprimento	Mercado			Suprimento disponível (a_i)
	SP (1)	BH (2)	RJ (3)	
Araraquara (1)	4	8	8	800
S. J. Campos (2)	2	8	5	1000
Demanda dos mercados (b_j)	500	400	900	

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

$$\min \; f(x_{11}, \ldots, x_{23}) = 4x_{11} + 8x_{12} + 8x_{13} + 2x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23}$$

Sujeito a:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 800$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1000$$

$$x_{11} + x_{21} = 500$$

$$x_{12} + x_{22} = 400$$

$$x_{13} + x_{23} = 900$$

$$x_{11} \geq 0; \;\; x_{12} \geq 0; \;\; x_{13} \geq 0; \;\; x_{21} \geq 0; \;\; x_{22} \geq 0; \;\; x_{23} \geq 0.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Solução ótima:

$x_{11} = 500; x_{12} = 300; x_{13} = 0;$

$x_{21} = 0; x_{22} = 100; x_{23} = 900.$

Função objetivo:

$f(500, 300, 0, 0, 100, 900) = 6900$

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Dados:

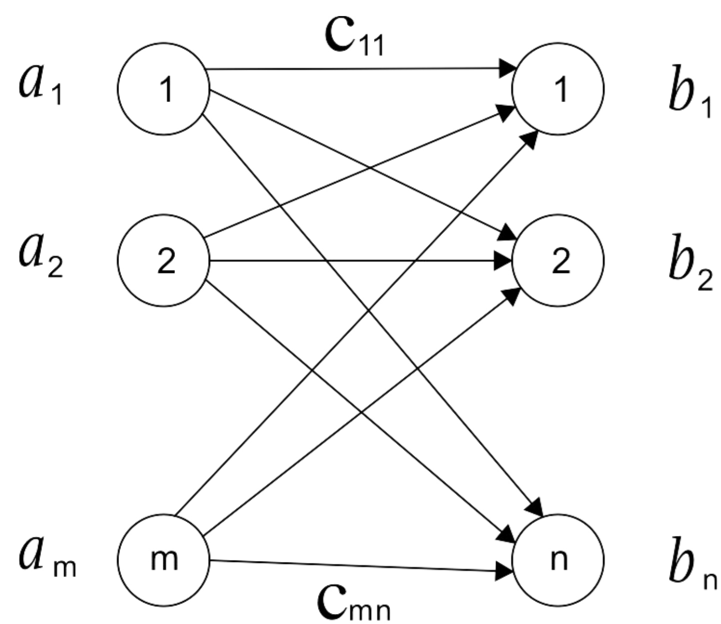
m: número de origens

n: número de destinos

a_i: oferta do produto na origem i.

b_j: demanda do produto no destino j.

c_{ij}: custo de transportar uma unidade do item da origem i ao destino j.



Variáveis de decisão:

x_{ij} quantidade de itens transportada da origem i para o destino j.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

- As quantidades transportadas não podem ser negativas!
  - Restrições $x_{ij} \geq 0$, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, fazem parte do modelo.
- $c_{ij}\, x_{ij}$ é o custo para se realizar o transporte da origem i para o destino j.

- O custo total de transporte, que deve ser minimizado, é dado por:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}}$$

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

- A quantidade de itens transportados de i para cada j não pode ultrapassar a quantidade disponível do produto em i:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i}$$

- As quantidades transportadas de cada i para j devem satisfazer a demanda requerida no destino:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j}$$

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

$$\min f(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeito a :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ inteiro}, \; i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n.$$

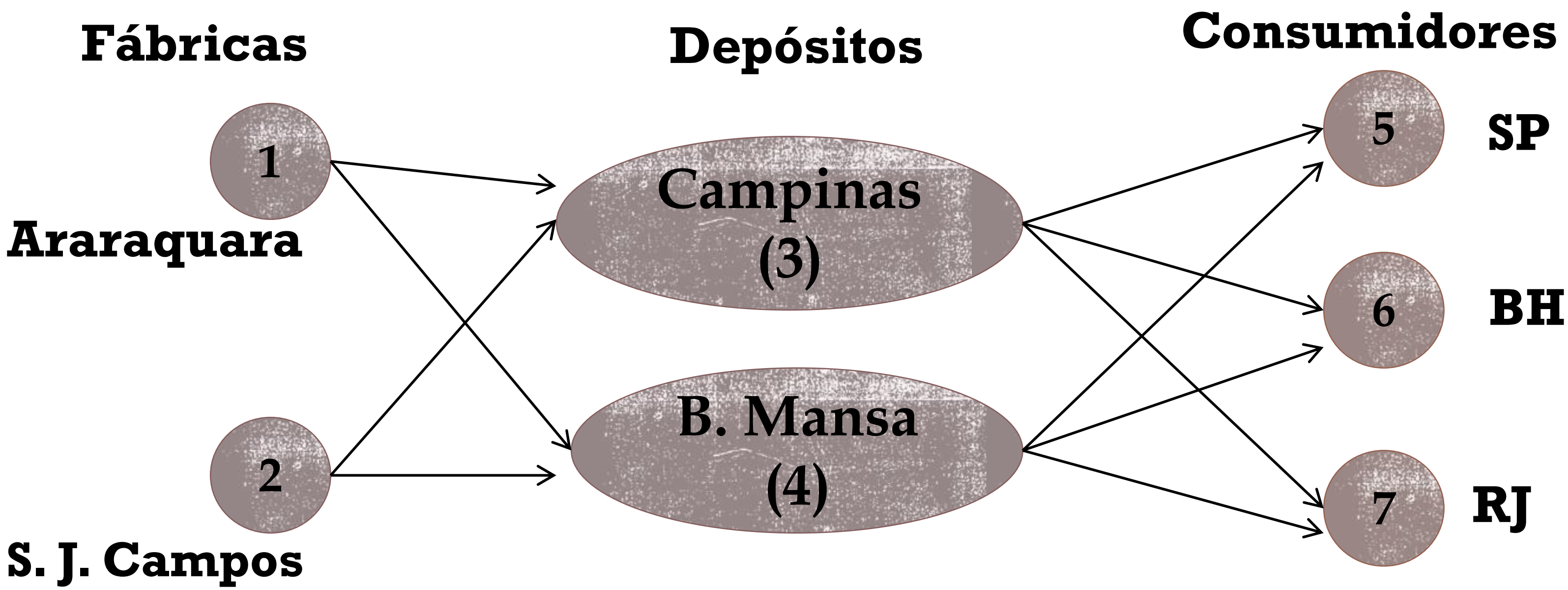
PROBLEMA DE TRANSBORDO

- Em muitos casos, o transporte não é feito diretamente da fábrica aos consumidores. Há uma etapa intermediária (depósitos).

PROBLEMA DE TRANSBORDO

- Se os mercados podem ser abastecidos somente a partir dos depósitos, como reformular o problema de transporte de bebidas, dados os custos de transporte? (Ver ilustração)

PROBLEMA DE TRANSBORDO



x_{ij}	qde do produto enviada da localidade i à localidade j.
c_{ij}	custo unitário do transporte de uma unidade de produto de cada depósito e de cada depósito para cada mercado consumidor.

PROBLEMA DE TRANSBORDO

Os custos de transporte:

Centro de suprimento	Depósitos	
	Campinas (3)	B. Mansa (4)
Araraquara (1)	1	3
S. J. Campos (2)	1	2

Centro de suprimento	Mercado		
	SP (5)	BH (6)	RJ (7)
Campinas (3)	1	3	3
B. Mansa (4)	3	4	1

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

$min\ \ f(x_{13}, \ldots, x_{47}) = 1x_{13} + 3x_{14} + 1x_{23} + 2x_{24} + 1x_{35} + 3x_{36} + 3x_{37} + 3x_{45} + 4x_{46} + 1x_{47}$

Sujeito a:

$x_{13} + x_{14} \leq 800$

$x_{23} + x_{24} \leq 1000$

$x_{35} + x_{45} = 500$

$x_{36} + x_{46} = 400$

$x_{37} + x_{47} = 900$

$x_{13} + x_{23} = x_{35} + x_{36} + x_{37}$

$x_{14} + x_{24} = x_{45} + x_{46} + x_{47}$

$x_{13} \geq 0;\ \ x_{14} \geq 0;\ \ldots;\ \ x_{46} \geq 0;\ \ x_{47} \geq 0.$

PROBLEMA DE DESIGNAÇÃO

- O problema de transporte também pode surgir em outras situações.

Há n pessoas e n tarefas. Cada pessoa deve executar uma única tarefa e todas as tarefas devem ser executadas. Cada pessoa i tem um interesse em efetuar cada tarefa j, dado por p_{ij}. Queremos fazer a alocação de modo que a soma dos interesses seja maximizada.

PROBLEMA DE DESIGNAÇÃO

O Problema de designação envolve a determinação de n! possíveis soluções.

Exemplo:

- para um problema com 5 trabalhadores e 5 tarefas o número de soluções possíveis é igual a 5 ! = 120.
- para um problema com 10 trabalhadores e 10 tarefas o número de soluções é igual a 10 ! = 3.628.800.

Obter a solução ótima por tentativa é DIFÍCIL !

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Destino / Origem	**1**	**2**	**...**	**n**	**Oferta**
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}	1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2m}	1
...					1
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	1
Procura	1	1	...	1	

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Variáveis de decisão

$x_{ij} = 1,$ se o individuo *i* for designado para a realização da tarefa *j*.

$x_{ij} = 0,$ caso contrário.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

- O problema de designação (ou atribuição):

$$\max f(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

cada trabalhador é designado a uma só tarefa

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

cada tarefa é executada apenas por um trabalhador

$$\boxed{x_{ij} \in \{0,\ 1\},} \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n.$$

PROBLEMA DO LATICÍNIO

- Uma empresa de laticínios produz queijos e leite. Parte do transporte da produção é feito pela própria empresa, enquanto o restante é terceirizado.
- O atual parque de veículos da empresa está obsoleto e será modernizado. Dois tipos de novos veículos são considerados para a substituição dos atuais.
- Apenas queijos podem ser transportados através de veículos do tipo A, em um total de no máximo 100 (x100 kg) por mês.
- Queijos e leite podem ser transportados por veículos do tipo B, em um total mensal de no máximo 50 (x100 kg) de queijo e 20 (x 100 l) de leite.

PROBLEMA DO LATICÍNIO

- A compra de um veículo do tipo A proporciona uma economia mensal de 1000 (x 1 $) em relação à contratação externa da distribuição.
- Para um veículo do tipo B, a economia mensal é de 700 (x 1 $).
- A empresa deseja maximizar suas economias mensais.
- A demanda diária mínima a ser transportada é de 2425 (x100 kg) de queijo e de 510 (x100 l) de leite.
- De modo a evitar investimentos em capacidade ociosa, foi determinado que a capacidade da frota não deve exceder a demanda diária mínima.
- Determinar o número de veículos de cada tipo que devem ser adquiridos.