RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Uma equação que contenha uma expressão do tipo x^2, y^{-2}, x.y, $\frac{\sqrt{y}}{z}$, sen(x), e^{x+z}, etc, é chamada não-linear em *x*, *y*, *z*, ..., porque ela não pode ser escrita como

$$ax + by + cz + ... = cte$$

que é uma equação linear em *x*, *y*, *z*, ...

Um sistema de *n* equações e *n* incógnitas x_1, x_2, ..., x_n é chamado de *não-linear* se uma ou mais equações é não-linear. Trazendo todos os termos diferentes de zero à esquerda de todas as equações, tem-se uma forma geral que pode ser usada para qualquer sistema não-linear.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \cdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

ou simplesmente

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \cdots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$$

em que $x^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Em notação vetorial, o sistema linear acima pode ser escrito como: F(x) = 0, em que

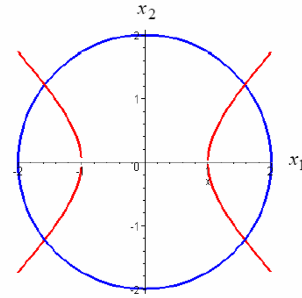
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Um vetor que $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ que satisfaz $F(\bar{x}) = 0$ é denominado *raiz do sistema não-linear*.

Exemplos:

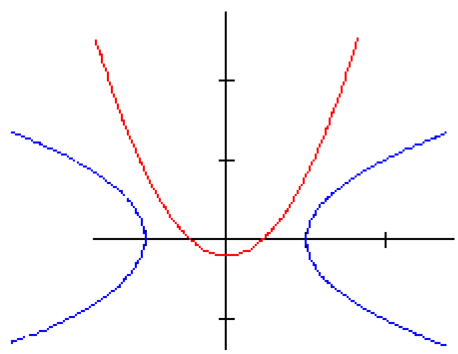
1) $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

Reescrevendo este sistema na forma do sistema, temos:



Este sistema não-linear admite quatro soluções, que são os pontos onde as curvas $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 - y^2 = 1$ se interceptam.

2) $$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2 - y^2 - 0.2 = 0 \\ f_2(x,y) = x^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$



Este sistema não tem solução, ou seja, não existem pontos onde as curvas $x^2 - y^2 - 0.2 = 0$ e $x^2 - y + 1 = 0$ se interceptem.

Método de Newton

O método mais amplamente estudado e conhecido para resolver sistemas de equação não lineares é o Método de Newton.

No caso de uma equação não linear a uma variável, o Método de Newton consiste em se tomar um modelo local linear da função f(x) em torno de x_k, e este modelo é a reta tangente à função em x_k.

Considerando inicialmente um sistema de equações não lineares com duas equações e duas incógnitas, temos:

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$$

Desta forma, buscamos determinar o vetor solução $(\bar{x},\bar{y})$ tal que $F(\bar{x},\bar{y})=0$ e $F(x,y)=\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$.

Seja (x_0,y_0) uma aproximação inicial para a solução $(\bar{x},\bar{y})$ do sistema. Expandindo $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$ por série de Taylor em torno do ponto (x_0,y_0) até a derivada de primeira ordem e igualando a zero a série truncada, temos:

$$\begin{cases} f_1(x,y) \approx\ f_1(x_0,y_0)+\dfrac{\partial\, f_1(x_0,y_0)}{\partial\, x}(x-x_0)+\dfrac{\partial\, f_1(x_0,y_0)}{\partial\, y}(y-y_0)=0 \\ f_2(x,y) \approx\ f_2(x_0,y_0)+\dfrac{\partial\, f_2(x_0,y_0)}{\partial\, x}(x-x_0)+\dfrac{\partial\, f_2(x_0,y_0)}{\partial\, y}(y-y_0)=0 \end{cases}$$

Este sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} -f_1(x_0,y_0)= \dfrac{\partial\, f_1(x_0,y_0)}{\partial\, x}(x-x_0)+\dfrac{\partial\, f_1(x_0,y_0)}{\partial\, y}(y-y_0) \\ -f_2(x_0,y_0)= \dfrac{\partial\, f_2(x_0,y_0)}{\partial\, x}(x-x_0)+\dfrac{\partial\, f_2(x_0,y_0)}{\partial\, y}(y-y_0) \end{cases}$$

A solução deste sistema fornece uma nova aproximação para a solução $(\bar{x},\bar{y})$ desejada. Na forma matricial, temos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}}_{J(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_0,y_0) \\ -f_2(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Definindo J(x_0, y_0) a matriz Jacobiana avaliada no ponto (x_0, y_0), temos:

$$J(x_0, y_0)\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_0, y_0) \\ -f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Denotando $d_x = (x - x_0)$ e $d_y = (y - y_0)$, temos o sistema linear:

$$J(x_0, y_0)\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_0, y_0) \\ -f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Resolvendo este sistema por um método numérico, temos os valores de d_x e d_y. Desta forma, a nova aproximação (x, y) é determinada por:

$$x = x_0 + d_x \quad \text{e} \quad y = y_0 + d_y$$

Os valores obtidos para x e y não são os valores de $\bar{x}$ e $\bar{y}$, mas são os valores de uma nova aproximação, ou seja:

$$x_1 = x_0 + d_x^0$$
$$y_1 = y_0 + d_y^0$$

Repetindo o procedimento de linearização em torno do ponto obtido (x_0,y_0), isto é, fazendo a expansão das funções f_1 e f_2 por série de Taylor até a derivada de 1ª ordem, obtemos uma nova aproximação (x_2, y_2). Assim, sucessivamente, no ponto (x_i,y_i), temos o processo iterativo:

$$J(x_k, y_k)\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_k, y_k) \\ -f_2(x_k, y_k) \end{pmatrix} \Rightarrow \textbf{Processo iterativo de Newton}$$

Denotando $r_i = (x_{i+1} - x_i)$ e $s_i = (y_{i+1} - y_i)$, resolvemos o sistema de equações lineares obtido anteriormente e determinamos a nova aproximação (x_{k+1}, y_{k+1}) por:

$$x_{k+1} = x_k + d_x^k$$
$$y_{k+1} = y_k + d_y^k$$

Convergência:

Condições para a convergência do método de Newton:

1. As funções $f_i = (x, y)$, i = 1, 2 e as derivadas até 2ª ordem devem ser contínuas e limitadas numa vizinhança da raiz $(\bar{x}, \bar{y})$.
2. Det[$J(x_k, y_k)$] $\neq 0$.
3. A solução inicial (x_0, y_0) deve ser próxima da raiz $(\bar{x}, \bar{y})$.

Critério de Parada:

- *Erro absoluto*:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \text{ e } |y_{k+1} - y_k| < \varepsilon .$$

- *Erro relativo*:

- $\dfrac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon$ e $\dfrac{|y_{k+1} - y_k|}{|y_{k+1}|} < \varepsilon$.

- *Análise de F(x,y) = 0*

$$|f_1(x_k, y_k)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |f_2(x_k, y_k)| < \varepsilon .$$

Se um dos critérios acima estiver satisfeito pare o método.

Generalização do Processo Iterativo de Newton:

Seja $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \quad \cdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$; em que, $F(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \cdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}$

O processo iterativo de Newton é dado por:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} - x_1^k \\ x_2^{k+1} - x_2^k \\ \vdots \\ x_n^{k+1} - x_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k) \\ -f_2(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k) \\ \vdots \\ -f_n(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k) \end{pmatrix}$$

De modo simplificado, temos:

$$J(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k) \begin{pmatrix} x_1^{k+1} - x_1^k \\ x_2^{k+1} - x_2^k \\ \vdots \\ x_n^{k+1} - x_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k) \\ -f_2(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k) \\ \vdots \\ -f_n(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k) \end{pmatrix}$$

em que $J(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$ é a matriz Jacobiana avaliada no ponto $(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$.

Denotando $d_1^k = x_1^{k+1} - x_1^k$; $d_2^k = x_2^{k+1} - x_2^k$ ... $d_n^k = x_n^{k+1} - x_n^k$, temos o sistema de equações lineares para ser resolvido:

$$J(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)\begin{pmatrix} d_1^k \\ d_2^k \\ \vdots \\ d_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k) \\ -f_2(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k) \\ \vdots \\ -f_n(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k) \end{pmatrix} \Leftrightarrow J(x^{(k)})\left(d^{(k)}\right) = -F(x^{(k)})$$

em que:

$$d^{(k)} = \begin{pmatrix} d_1^k \\ d_2^k \\ \vdots \\ d_n^k \end{pmatrix}; \; x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} \text{ e } \; F(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} f_1(x^{(k)}) \\ f_2(x^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(x^{(k)}) \end{pmatrix}$$

Utilizando um método direto para resolver este sistema linear obtido, temos os valores de d_1^k ; d_2^k ... d_n^k e a nova solução aproximada x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, ..., x_n^{k+1} é dada por:

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1^k \\ d_2^k \\ \vdots \\ d_n^k \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x^{(k+1)}) = (x^{(k)}) + (d^{(k)})$$

Convergência:

Condições para a convergência do método de Newton generalizado:

1. As funções $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$; i = 1, 2, ..., n e suas derivadas até 2ª ordem devem ser contínuas e limitadas numa vizinhança da raiz $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T$.
2. Det[$J(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$] $\neq 0$, para k = 0,1,...
3. A solução inicial $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)^T$ deve ser próxima da $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T$.

OBS: A sequência gerada pelo Método de Newton $(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)^T$, a partir de uma solução inicial $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)^T$ suficientemente próxima da solução do sistema, converge para $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T$, e a convergência é quadrática.

Critério de Parada:

- *Análise de* $F(x_1, x_2, ..., x_n) = F(x) = 0$:

$$\left\| F(x^{(k)}) \right\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left| f_i\,(x^{(k)} \right| < \varepsilon$$

- *Análise do Erro absoluto*:

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{k+1} - x_i^k \right| < \varepsilon$$

- *Análise do Erro relativo*:

- $$\left\| \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k+1)}} \right\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left| \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^{k+1}} \right| < \varepsilon \,.$$

-

Nas expressões acima as fórmulas podem ser simplificadas considerando-se:

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = d^{(k)} \;\; e \;\; x_i^{k+1} - x_i^k = d_i^k$$

Exemplo:

Resolver o sistema de equações não lineares utilizando o método de Newton com $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ e $\varepsilon = 0.01$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$

Exercício:

Resolver o sistema de equações não lineares utilizando o método de Newton com $(x_0, y_0) = (1, 5)$ e $\varepsilon = (0.01)$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 1 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \qquad Solução: \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -0.002654 \\ 3.002654 \end{pmatrix}$$

Método de Newton Modificado

A modificação sobre o Método de Newton consiste em tomar a cada iteração k a matriz J(x_0, y_0, ..., z_0), em vez de J(x_k, y_k, ..., z_k). A partir de uma aproximação inicial (x_0, y_0, ..., z_0), uma sequência de soluções é gerada a partir da solução do sistema linear:

$$J(x_0, y_0, ,..., z_0)\begin{pmatrix} r_k \\ s_k \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_k, y_k,..., z_k) \\ -f_2(x_k, y_k,..., z_k) \\ \vdots \\ -f_n(x_k, y_k,..., z_k) \end{pmatrix}$$

Desta forma, a matriz Jacobiana é avaliada apenas uma vez e, para todo k, o sistema linear a ser resolvido a cada iteração terá a mesma matriz de coeficientes: $J(x_0, y_0, ,..., z_0)$.

Se usarmos a fatoração LU para resolvê-lo, os fatores L e U serão calculados apenas uma vez e, a partir da 2ª iteração, será necessário resolver apenas dois sistemas triangulares para obter os valores de r_k, s_k, ..., t_k.

Exemplo:

Resolver o sistema de equações não lineares utilizando o método de Newton Modificado com (x_0, y_0) = (1, 3) e ε = 0.01.

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Exercícios

1 Resolva pelo Método de Newton, com ε =10^{-3}, os sistemas a seguir.

a. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 - x_2^2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ com $x^0 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{cases} 3.x_1^2.x_2 - x_2^3 = 4 \\ x_1^2 + x_1.x_2^3 = 9 \end{cases}$ com $x^0 = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 2.5 \end{pmatrix}$

c. $\begin{cases} (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 4 \\ x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 4 \end{cases}$ com $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^3 + x_2 = 0 \end{cases}$ com $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

e. $\begin{cases} x_1^2 - 4.x_1 + x_2^2 = 0 \\ x_1^2.x_2 + 2.x_1^2 = -1 \end{cases}$ com $x^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

f. $\begin{cases} x_1 + 3.\ln x_1 - x_2^2 = 0 \\ 2.x_1^2 - x_1.x_2 - 5.x_1 + 1 = 0 \end{cases}$ com $x^0 = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2.2 \end{pmatrix}$

g. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ 2.x_1^2 + x_2^2 - 4.x_3 = 0 \\ 3.x_1^2 - 4.x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ com $x^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

h. $\begin{cases} x_1^3 + 2.x_2 + x_3 = 4 \\ 2.x_1^2 + x_2^2 - 4.x_3 = -1 \\ 3.x_1^2 - 4.x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ com $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2 Resolva pelo Método de Newton Modificado, com ε =10^{-3}, os sistemas 2, 3, 4 e 5 do exercício anterior.