SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Um problema fundamental que normalmente é encontrado na descrição matemática de fenômenos físicos é o da solução simultânea de um conjunto de equações. Traduzido para a linguagem matemática, tais fenômenos passam a ser descritos por um conjunto de m equações em que se deseja determinar a solução de n variáveis de interesse, normalmente chamadas de incógnitas.

Motivação

Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, representados por (1), (2), (3), (4) e (5), ao quais são equipados para transportar 5 tipos de diferentes máquinas A, B, C, D e E segundo a tabela:

	Máquinas				
Caminhões	A	B	C	D	E
(1)	1	1	1	0	2
(2)	0	1	2	1	1
(3)	2	1	1	2	0
(4)	3	2	1	2	1
(5)	2	1	2	3	1

Problema:

Supondo que A, B, C, D e E é a quantidade de máquinas que cada caminhão pode transportar levando carga plena, quantos caminhões de cada tipo devemos enviar para transportar exatamente:

- 27 máquinas do tipo A,
- 23 máquinas do tipo B,
- 31 máquinas do tipo C,
- 31 máquinas do tipo D,
- 22 máquinas do tipo E?

Definições

1. Uma **equação linear** em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes reais;

2. Um **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear** é um conjunto de n equações lineares, ou seja, é um conjunto de equações lineares do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para i, k = 1,..., m e j = 1,..., n. Na forma matricial, este sistema é representado como: **Ax** = **b**. Neste caso,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{: matriz dos coeficientes de ordem } m \times n$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{: vetor de incógnitas de ordem } n \times 1$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{: vetor independente de ordem } m \times 1$$

quando $m = n$, o sistema de equações lineares é dito quadrado.

Resolver um sistema **Ax** = **b** consiste em determinar um vetor $x^* = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$ que satisfaça simultaneamente todas as equações lineares que compõem o sistema.

Classificação do Sistema Linear quanto à Solução

Os tipos de soluções dos sistemas lineares dependem da matriz **A**:

Sistema Possível ou Compatível

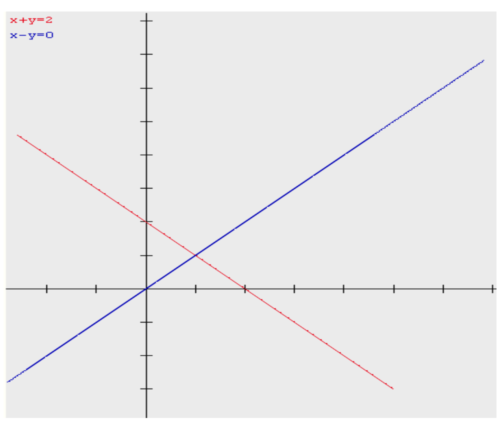
- Admite solução.

Sistema Possível e Determinado

- Possui uma única solução;
- O determinante de A deve ser diferente de zero (A é uma matriz não-singular);
- Se b for um vetor nulo (constantes nulas), a solução do sistema será a solução trivial, ou seja, o vetor x também será nulo.

Análise Geométrica no $\mathbb{R}^2$:

$$P: \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = -2 \neq 0$$



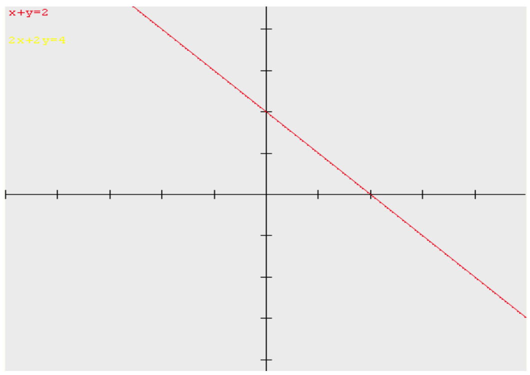
S = $\{x^* \in \mathbb{R}^2 \,/ \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Neste caso, as equações de retas $x_1 + x_2 = 2$ e $x_1 - x_2 = 0$ são concorrentes em $\mathbb{R}^2$ e, desta forma, o sistema tem solução única.

Sistema Possível e Indeterminado

- Possui infinitas soluções;
- O determinante de A é nulo (A é uma matriz singular);
- O vetor de constantes b deve ser nulo ou múltiplo de uma coluna de A.

Análise Geométrica no $\mathbb{R}^2$:

$$P: \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{A} = 2 - 2 = 0$$



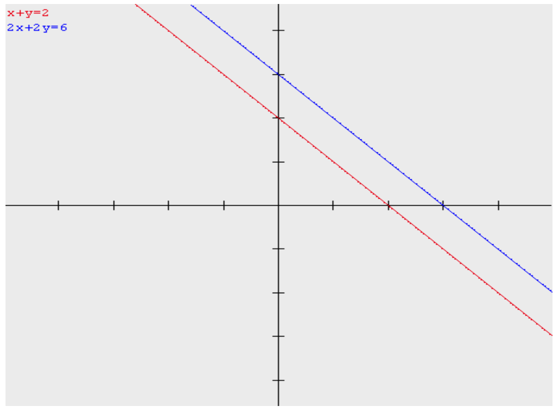
Em $\mathbb{R}^2$, se as retas forem *paralelas coincidentes*, então o sistema possui infinitas soluções, portanto, S = $\{x^* \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{pmatrix} x_1{}^* \\ x_2{}^* \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_1 \\ 2 - x_1 \end{pmatrix} x_1 \in \mathbb{R}\}$

Sistema Impossível ou Incompatível

- Não possui solução;
- O determinante de A deve ser nulo;
- O vetor B não pode ser nulo ou múltiplo de alguma coluna de A

Análise Geométrica no $\mathbb{R}^2$:

$$P: \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = 0$$



Em $\mathbb{R}^2$, o sistema não tem solução quando as equações de retas que o definem são *paralelas não coincidentes*.

$$P: \begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \sim \begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ & & 0 & = & -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nexists \text{ solução em } \mathbb{R}^2$$

Análise Geométrica das Soluções em $\mathbb{R}^3$:

Forma do Sistema Linear: $\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{cases}$

Π_1: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \Rightarrow n_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}$: vetor normal ao plano Π_1.

Π_2: $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \Rightarrow n_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}$: vetor normal ao plano Π_2.

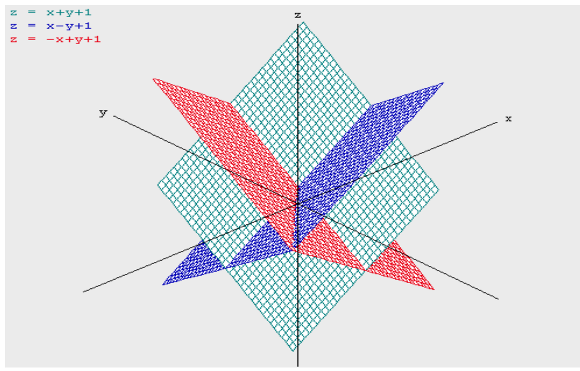
Π_3: $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \Rightarrow n_3 = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}$: vetor normal ao plano Π_3.

a) Sistema compatível determinado:

Se n_1, n_2 e n_3 forem Linearmente Independentes (L.I.) em $\mathbb{R}^3$, então **A** é uma matriz não singular. Neste caso, o sistema P tem solução única.

$$\text{P:}\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ -x + y - z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Geometricamente:



Os três planos $\Pi_1: z - x - y - 1 = 0$, $\Pi_2: z - x + y - 1 = 0$ e $\Pi_3: z + x - y - 1 = 0$ são concorrentes entre si.

b) Sistema compatível indeterminado:

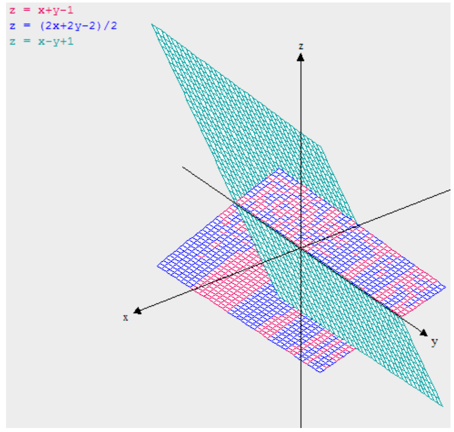
Um sistema é compatível indeterminado em $\mathbb{R}^3$ se a matriz **A** é singular. Desta forma, dois vetores normais aos planos devem ser Linearmente Dependentes (L.D.). Três situações podem ocorrer:

- n_1 e n_2: L.D. e L.I. com n_3. (1)
- n_1 e n_3: L.D. e L.I. com n_2. (2)
- n_2 e n_3: L.D. e L.I. com n_1. (3)

OBS: Se *:* n_1, n_2 e n_3 são L.D. $\Rightarrow$ det **A** = 0 (4)

Geometricamente:
Para o caso (1) tem-se o seguinte exemplo:

$$\text{P:}\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$



Neste caso: $\Pi_1: z-x-y-1=0$, $\Pi_2: z-x-y-1=0$ e $\Pi_3: z-x+y-1=0$. Os planos Π_1 e Π_2 são paralelos coincidentes. (1).

Para o caso (4) tem-se o seguinte exemplo:

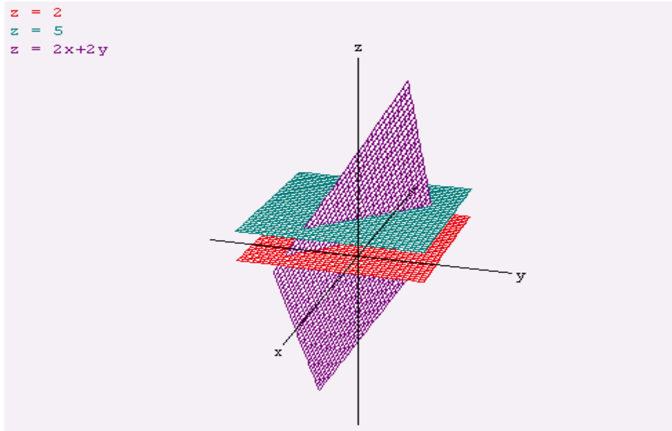
$$\text{P:}\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

Neste caso, $\Pi_1: z-x-y-1=0$, $\Pi_2: z-x-y-1=0$ e $\Pi_3: z-x-y-1=0$ são paralelos coincidentes.

c) Sistema Incompatível:

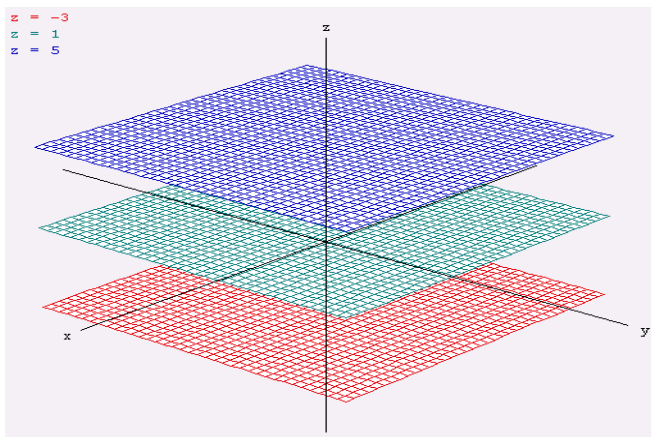
Para sistemas incompatíveis, a matriz **A** deve ser singular, porém, os planos paralelos devem ser não coincidentes. As condições de paralelismo são as mesmas encontradas em (1), (2), (3) e (4).

Considerando-se os planos $\Pi_1: z-2=0$ e $\Pi_2: z-5=0$, $\Pi_3: z-2x-2y=0$, geometricamente tem-se:



Os planos $\Pi_1 : z - 2 = 0$ e $\Pi_2 : z - 5 = 0$ são paralelos não coincidentes.

Quando det **A** = 0 os planos Π_1: z + 3 = 0, Π_2 : z – 1 = 0 e Π_3: z – 5 = 0 são paralelos não coincidentes. Geometricamente tem-se:



Os planos Π_1 : z + 3 = 0, Π_2 : z – 1 = 0 e Π_3: z – 5 = 0 são paralelos não coincidentes.

Definições

1. Um sistema linear **Ax = b** é **homogêneo** se o vetor **b** = $(b_1, b_2, ..., b_m)^T = 0$.

Um sistema homogêneo é sempre consistente, uma vez que o vetor nulo é sempre solução deste sistema.

2. **Matriz Transposta:**

Seja **A** $\in$ $_{ij}$), i = 1, ..., n, j = 1, ..., n. A matriz transposta de **A**, denotada por $\mathbf{A}^\mathbf{T}$ é definida a partir da matriz **A** por: $A^T = (b_{ij})$, i = 1,…, n, j = 1,…, n tal que $b_{ij} = a_{ji}$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3. **Matriz simétrica:**

Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$, A = ($a_{ij}$), i = 1, ..., n, j = 1, ..., n é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ (i $\neq$ j), *i*, *j* = 1, ..., n.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4. **Matriz triangular inferior:**

Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$, A = ($a_{ij}$), i = 1, ..., n, j = 1, ..., n é triangular inferior se a_{ij} = 0 para i < j, i, j = 1,...,n.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

5. **Matriz triangular superior:**

Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$, A = ($a_{ij}$), *i* = 1, ..., n, *j* = 1, ..., n é triangular superior se a_{ij} = 0 para *i* > *j*, *i*, *j* = 1,...,n.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

OBS:

- *Sistema triangular inferior*: matriz do sistema é uma matriz triangular inferior.
- *Sistema triangular superior*: matriz do sistema é uma matriz triangular superior.

6. Sistemas equivalentes:

Sejam P e P' dois sistemas lineares (quadrados ou retangulares). Dizemos que o sistema P' é equivalente a P (notação: P ~ P') se P' é obtido de P a partir das seguintes operações elementares:

i. Troca da posição de linhas ou de colunas de P;
ii. Multiplicação de uma linha de P por um escalar $\alpha \neq 0$;
iii. Multiplicação uma linha de P por um escalar $\alpha \neq 0$ e adição a uma outra linha de S.

OBS: Se P e P' são equivalentes, então a solução de P' é solução de P.

Exemplo:

P: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ multiplicando a 1º. linha de P por $\alpha = -1$ e adicionando à 2º. linha de P,

obtemos o sistema equivalente P' dado por: P': $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 0x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases}$

Na forma matricial: A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ~ A'= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$matriz triangular superior.

Classificação dos sistemas lineares

- *Métodos diretos*: são aqueles que fornecem solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações.

- *Métodos iterativos*: geram uma sequência de vetores $\{x^{(k)}\}$ a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$. Sob certas condições, esta sequência converge para a solução x^*, caso ela exista.

SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES E INVERSÃO DE MATRIZES

Métodos exatos para solução de sistemas lineares

Para sistemas lineares possíveis e determinados de dimensão $n \times n$, o vetor solução $\boldsymbol{x}$, é dado por $x = A^{-1}b$. No entanto, calcular explicitamente a inversa de uma matriz não é aconselhável, devido à quantidade de operações envolvidas. Surge então a necessidade de utilizar técnicas mais avançadas eficientes como as que estudaremos a seguir.

Sistema Triangular Superior

Seja o sistema triangular superior

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

em que $a_{ii} \neq 0$; i = 1, 2,..., n.

Por **substituição Retroativa** podemos resolvê-lo pelas fórmulas:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right) / a_{ii},\ i = (n-1), \ldots, 1$$

Exemplo:

Resolver o sistema triangular superior

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por substituição retroativa:

$x_3 = 2$

$-x_2 + x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1$

Portanto, $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Sistema Triangular Inferior

Seja o sistema triangular inferior:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

em que $a_{ii} \neq 0$, i = 1, 2, ..., n.

Por **substituição progressiva** podemos resolvê-lo pelas fórmulas:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j) \,/\, a_{ii},\ i = 2, 3, \dots, n.$$

Exemplo:

Resolver o sistema triangular inferior,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Por substituição progressiva tem-se:

$$y_1 = 9$$

$$y_2 = 1$$

$$\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 = 7 \quad \rightarrow \quad y_3 = 2$$

Portanto, $y^* = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Método de Eliminação de Gauss

Seja o sistema linear **Ax** = **b**, em que **A** possui todas as submatrizes principais não singulares. O método de eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema dado num sistema triangular superior equivalente pela aplicação repetida da operação:

"subtrair de uma equação outra equação multiplicada por uma constante diferente de zero".

É claro que tal operação não altera a solução do sistema, isto é, obtém-se com ela outro sistema equivalente ao original.

Descrição do algoritmo:

Considere o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

cuja matriz dos coeficientes chamaremos $A^{(1)}$.

A matriz aumentada é dada por:

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

em que $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$, $b_i^{(1)} = b_i$; i, j = 1, 2, ..., n.

Por hipótese temos que $a_{11}^{(1)} \neq 0$, pois det $(A_1) \neq 0$.

Passo 1:

Eliminar a incógnita x_1 da 2ª , 3ª , ..., nª equações (isto é, zerar os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal). Isso é feito da seguinte forma:

- Subtraímos da 2ª equação a 1ª equação multiplicada por $m_{21} = \dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$

- Subtraímos da 3ª equação a 1ª equação multiplicada por $m_{31} = \dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$

$$\vdots$$

- Subtraímos da nª equação a 1ª equação multiplicada por $m_{n1} = \dfrac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$

Ao final desta etapa, teremos a seguinte matriz:

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

em que:

$m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, i = 2, 3, ..., n

$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}$, i = 2, 3, ..., n, j = 1, 2, ..., n

$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)}$, i = 2, 3, ..., n

Temos por hipótese que $a_{22}^{(2)} \neq 0$, pois det (A_2) $\neq 0$.

OBS: Os elementos $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, i = 2, 3, ..., n são denominados *multiplicadores* e o elemento $a_{11}^{(1)}$ é denominado de *pivô* da primeira etapa.

Passo 2:

Eliminar a incógnita x_2 da 3ª, 4ª, ..., nª equações (isto é, zerar os elementos da segunda coluna abaixo da diagonal). Para isso:

Subtraímos da 3ª equação a 2ª equação multiplicada por $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$

Subtraímos da 4ª equação a 2ª equação multiplicada por $m_{42} = \dfrac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$

$$\vdots$$

Subtraímos da nª equação a 2ª equação multiplicada por $m_{n2} = \dfrac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$

Ao final desta etapa, teremos a matriz $A^{(3)}$:

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{3n}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array}\right)$$

em que:

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, \text{ i = 3, 4, ..., n}$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2} a_{2j}^{(2)}, \text{ i = 3, ..., n, j = 2, 3, ..., n}$$

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2} b_2^{(2)}, \text{ i = 3, 4, ..., n}$$

Seguindo raciocínio análogo, procede-se até a etapa (n – 1).

<u>Passo (n – 1):</u>

Temos por hipótese que $a_{n-1,n-1}^{(n-1)} \neq 0$, pois, $\det(A_{(n-1)}) \neq 0$

Eliminar a incógnita x_{n-1} da nª equação (isto é, zerar o elemento da (n – 1)ª coluna abaixo da diagonal). Isso é feito da seguinte forma:

Subtraímos da nª equação, a (n – 1)ª equação multiplicada por $m_{n,(n-1)} = \dfrac{a_{n,(n-1)}^{(n-1)}}{a_{(n-1),(n-1)}^{(n-1)}}$.

E assim, obtemos a matriz final:

$$A^{(n)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array}\right)$$

em que:

$$m_{n,(n-1)} = \frac{a_{n,(n-1)}^{(n-1)}}{a_{(n-1),(n-1)}^{(n-1)}}$$

$a_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{(n-1)} - m_{n,(n-1)} a_{(n-1),j}^{(n-1)}$, i = n, j = (n – 1), n

$b_i^{(n)} = b_i^{(n-1)} - m_{n,(n-1)} b_{n-1}^{(n-1)}$, i = n

O sistema triangular correspondente é dado por:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1,(n-1)}^{(1)} + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2,(n-1)}^{(2)} + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3,(n-1)}^{(3)} + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{(n-1),(n-1)}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1),n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

o qual é equivalente ao Sistema Linear original.

Exemplo:

Utilizando o método de Eliminação de Gauss, resolver o sistema:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 13 \end{cases}$$

Exercício:

Utilizando o método de Eliminação de Gauss, resolver os sistemas Lineares:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$ $\qquad x^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 17 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 4x_4 = 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$ $\qquad x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Método de Gauss com Pivoteamento Parcial

Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

O Método de Gauss com Pivoteamento Parcial consiste em transformar o sistema dado, através de operações elementares sobre as linhas, em sistema triangular superior, tomando como pivô em cada passo, o elemento de maior valor absoluto abaixo da diagonal de cada coluna da matriz **A** (elemento $a_{kk}^{(k)}$).

Se em algum passo k encontrarmos $a_{kk}^{(k)} = 0$ isso significa que det (A_k) = 0. Nesse caso, o sistema ainda pode ter solução determinada, basta que equações sejam permutadas de modo que o coeficiente da k[a] incógnita seja ≠ 0, ou seja, det (A) ≠ 0.

OBS: Quando usamos esta estratégia de pivoteamento pode-se provar que a propagação dos erros de arredondamento é controlada, uma vez que o elemento pivô será o maior em valor absoluto de cada coluna.

Exemplo:

Utilizando o Método de Eliminação de Gauss com Pivoteamento Parcial, resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 1x_2 = 4 \\ 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

Exercício:

Utilizando o Método de Gauss com Pivotamento Parcial, resolva o sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss com Pivoteamento Total

Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

O Método de Gauss com Pivoteamento Total consiste em transformar o sistema dado, através de operações elementares sobre as **linhas e colunas**, em sistema triangular superior equivalente.

Neste caso, tomamos como pivô, em cada passo, o elemento de maior valor absoluto entre todos os elementos da submatriz abaixo da k-ésima linha e a partir da k-ésima coluna, isto é, entre os elementos $a_{ij}^{(k)}, i \geq k, j \geq k$.

OBS:

1. As trocas de colunas na matriz produzem trocas no vetor solução. Desta forma, as trocas devem ser armazenadas em um vetor Q = (q_1, q_2, ..., q_n), em que q_j fornece a coluna na posição j.
2. Esta estratégia não é usualmente empregada, pois, envolve uma comparação entre os elementos envolvidos na troca de linhas e colunas, que acarreta um esforço computacional maior que a estratégia de pivoteamento parcial.

Exemplo:

Resolver o sistema de equações lineares usando o Método de Eliminação de Gauss com Pivoteamento Total.

$$\begin{cases} 4x_1 & + & & + & x_3 & = & 0 \\ & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Exercícios

1) Resolver pelo método de Eliminação de Gauss com pivotamento total, o sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases} \qquad x^* = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Método de Decomposição LU

O processo de decomposição LU (*Least Upper*) é uma das técnicas mais utilizadas para resolver um sistema linear Ax = B. Esta técnica consiste na decomposição da matriz A em um produto de matrizes L e U. Consideramos que L é uma matriz triangular inferior com a diagonal unitária e que U é a matriz triangular superior.

<u>Teorema:</u> (*Decomposição LU*)

Seja A = (a_{ij}) uma matriz quadrada de ordem n, e A_k o menor principal, constituído das k primeiras linhas e k primeiras colunas de A. Assumimos que det(A_k) $\neq$ 0, k = 1, 2, ..., n – 1. Então, existe uma única matriz triangular inferior L = (l_{ij}), com $l_{11} = l_{22} = \ldots = l_{nn} = 1$, e uma única matriz triangular superior U= (u_{ij}) tal que LU = A. Além disso, det(A) = $u_{11}\, u_{22} \ldots u_{nn}$.

Demonstração: Neide Bertoldi Franco (Editora Pearson, 2006)

Processo de decomposição da matriz A em LU

Para obter os fatores l_{ij} e u_{ij} das matrizes L e U podemos aplicar a definição de produto e igualdade de matrizes, ou seja, LU = A:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}$$

Para obtermos os elementos da matriz L e da matriz U, devemos calcular os elementos da linha de U e os elementos da coluna de L na seguinte ordem:

1ª linha de U:
$$1u_{11} = a_{11} \Rightarrow u_{11} = a_{11}$$
$$1u_{12} = a_{12} \Rightarrow u_{12} = a_{12}$$
$$\vdots$$
$$1u_{1n} = a_{1n} \Rightarrow u_{1n} = a_{1n}$$

1ª coluna de L:
$$l_{21}\, u_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$
$$l_{31}\, u_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$
$$\vdots$$

$$l_{n1}\, u_{11} = a_{n1} \Rightarrow l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{11}}$$

2ª linha de U:

$$l_{21}\, u_{12} + u_{22} = a_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}\, u_{12}$$
$$l_{21}\, u_{13} + u_{23} = a_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}\, u_{13}$$
$$\vdots$$
$$l_{21}\, u_{1n} + u_{2n} = a_{2n} \Rightarrow u_{2n} = a_{2n} - l_{21}\, u_{1n}$$

2ª coluna de L:

$$l_{31}\, u_{12} + l_{32}\, u_{22} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} u_{12}}{u_{22}}$$
$$l_{41}\, u_{12} + l_{42}\, u_{22} = a_{42} \Rightarrow l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41} u_{12}}{u_{22}}$$
$$\vdots$$
$$l_{n1}\, u_{12} + l_{n2}\, u_{22} = a_{n2} \Rightarrow l_{n2} = \frac{a_{n2} - l_{n1} u_{12}}{u_{22}}$$

Se continuarmos calculando 3ª linha, 3ª coluna, 4ª linha, 4ª coluna etc, teremos as fórmulas gerais:

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} & i \le j \\ l_{ij} = (a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj} & i > j \end{cases}$$

Aplicação da Decomposição LU na resolução de Sistemas Lineares

Seja o sistema linear **Ax** = **b** de ordem n, em que **A** satisfaz às condições da decomposição LU (Teorema). Então o sistema **Ax** = **b** pode ser escrito como:

$$(LU)x = b$$

Se considerarmos **y** = **Ux**, a solução do sistema linear pode ser obtida a partir da resolução dos sistemas triangulares:

Ly = b **Ux = y**

OBS: A decomposição LU fornece um dos algoritmos mais eficientes para o cálculo do determinante de uma matriz.

Exemplo

Utilizando o método de decomposição LU, resolver o sistema Ax = b e calcular o det(A):

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Exercício

Considere o sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 - 10x_3 = 3 \end{cases}$$

a) Resolver o sistema usando decomposição LU

b) Calcular det(A) utilizando a decomposição LU.

OBSERVAÇÃO 1:

Se o det(A_k) = 0 para algum k = 1, ..., n, mas det(A) ≠ 0, então podemos aplicar o processo de decomposição LU desde que permutemos a linha k por uma linha abaixo dela e det (A_k) ≠ 0, k = 1, ..., n.

Exemplo:

Determinar a solução do sistema utilizando a decomposição LU:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO 2:

O método de Eliminação de Gauss também pode ser utilizado para a obtenção dos coeficientes l_{ij} e u_{ij} das matrizes da decomposição LU.

Para a matriz L, basta associarmos os coeficientes l_{ij} aos coeficientes m_{ij} do método de Eliminação de Gauss e considerarmos $l_{ii} = 1$ e $l_{ij} = 0$ se i < j. Deste modo, temos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = L$$

A matriz resultante do processo de Eliminação de Gauss (matriz escalonada) é a matriz U do método da decomposição LU.

Exemplo:

Determinar a solução do sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Método de Eliminação de Gauss:

Sistema resultante: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Método de Decomposição LU:

Sistemas resultantes:

Método de Gauss Compacto

Seja o sistema linear Ax = b, de ordem n, em que A possui todas as submatrizes não singulares. O Método de Gauss Compacto é uma maneira prática de se obter as matrizes L e U da de decomposição LU, armazenando-a de forma compacta. Os termos independentes b_i, i = 1, ..., n são obtidos da mesma maneira que os elementos u_{ij} e serão chamados de $u_{i,n+1}$, i = 1, ..., n.

Construção do método

Seja o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Primeiramente, montamos a matriz de ordem n × (n+1):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right)$$

em que $\begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Em seguida, construímos a matriz n × (n+1), em que os termos independentes b_i, i = 1, 2, ..., n, por serem obtidos da mesma maneira que os elementos u_{ij}, serão chamados de $u_{i,n+1}$, i = 1, 2, ..., n. Assim, sobre a matriz original armazenamos a matriz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} & u_{1,n+1} \\ l_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} & u_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & u_{nn} & u_{n,n+1} \end{array}\right)$$

Para determinar os termos u_{ij} e l_{ij}, i, j = 1, 2, ..., n utilizamos as mesmas expressões da decomposição LU, entretanto, i = 1, 2, ..., n e j = 1, 2, ..., n, (n+1):

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} & i \leq j \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj} & i > j \end{cases}$$

Determinados os elementos u_{ij} e l_{ij}, i, j = 1, 2, ..., n resolvemos o sistema Ux = b', em que $b_i' = u_{i,n+1}$, i = 1, 2, ..., n.

OBS: No caso em que y é determinado pelo Gauss Compacto, não é necessário resolver o sistema Ly = b, basta resolver diretamente Ux = y, em que $y = \begin{pmatrix} u_{1,n+1} \\ u_{2,n+2} \\ \vdots \\ u_{n,n+1} \end{pmatrix}$.

Uma das vantagens do método de Gauss Compacto, é que podemos resolver de uma só vez vários sistemas associados.

Exemplo:

1. Utilizando o método de Gauss-Compacto, resolver o sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercício

Resolver o sistema matricial composto usando o método de Gauss-Compacto:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ -7 & 6 & 6 \\ -11 & 2 & 20 \end{pmatrix}$$

Método de Cholesky

O Método de Cholesky é definido para a resolução de sistemas lineares de ordem quadrada *n* cuja matriz dos coeficientes seja simétrica e definida positiva. A decomposição feita a seguir considera estas hipóteses.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & & & \\ g_{21} & g_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Assim, a matriz dos coeficientes A é decomposta no produto $G.G^T$, em que G é uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal estritamente positivos.

$$A = G\,G^T$$

Aplicando a definição de produto matricial, obtém-se as seguintes fórmulas para os elementos de G e sua transposta:

Elementos diagonais

$$\begin{aligned} a_{11} &= g_{11}^2 \\ a_{22} &= g_{21}^2 + g_{22}^2 \\ &\vdots \\ a_{nn} &= g_{n1}^2 + g_{n2}^2 + \cdots + g_{nn}^2 \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{cases} g_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ g_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2} \quad , i = 2,3,\ldots,n \end{cases} \quad \text{para elementos da diagonal principal}$$

Elementos não diagonais

1ª coluna
$$\begin{aligned} a_{21} &= g_{21}g_{11} \\ a_{31} &= g_{31}g_{11} \\ &\vdots \\ a_{n1} &= g_{n1}g_{11} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}, \; i = 2, 3, \ldots, n$$

2ª coluna
$$\begin{aligned} a_{32} &= g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} \\ a_{42} &= g_{41}g_{21} + g_{42}g_{22} \\ &\vdots \\ a_{n2} &= g_{n1}g_{21} + g_{n2}g_{22} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad g_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}.g_{jk}}{g_{jj}}, \; i = 2, 3, \ldots, \; n$$

$$\vdots$$

j-ésima coluna
$$\begin{aligned} a_{j+1,j} &= g_{j+1,1}g_{j1} + g_{j+1,2}g_{j2} + \ldots + g_{j+1,j}g_{jj} \\ a_{j+2,j} &= g_{j+2,1}g_{j1} + g_{j+2,2}g_{j2} + \ldots + g_{j+2,j}g_{jj} \\ &\vdots \\ a_{nj} &= g_{n1}g_{j1} + g_{n2}g_{j2} + \cdots + g_{nj}g_{jj} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} \mathrm{g}_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{g_{11}} & , i = 2,3,\ldots,n \\ g_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}.g_{jk}}{g_{jj}} & , 2 < j < i \end{cases}$$ para elementos que não pertencem a diagonal principal

Uma vez calculada a matriz G, a solução do sistema A.x = b fica reduzida à solução dos seguintes sistemas triangulares:

$$\mathbf{Gy = b} \qquad \mathbf{G^T x = y}$$

OBS: Utilizando a Decomposição de Cholesky, temos que $A = G.G^t$. Portanto,

$$\det(A) = (\det G)^2 = (g_{11}g_{22}\ldots g_{nn})^2$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a. Verificar se A pode ser decomposta em $G.G^t$
b. Decompor A em $G.G^t$
c. Calcular o determinante de A.
d. Resolver o sistema Ax = b com $b = (2 \;\; 1 \;\; 5)^T$

Exercício

1. Sejam as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Escolha adequadamente e resolva um dos sistemas Ax = b, Bx = b, pelo processo de Cholesky, em que $b = (2 \;\; 16 \;\; 9)^T$.

Matriz inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se det(A) ≠ 0, então existe uma matriz B, tal que a seguinte relação seja satisfeita :

$$A\,B = B\,A = I \text{ (I é a matriz identidade)}$$

A matriz B é chamada de matriz inversa de A e representada por $B = A^{-1}$.

Logo, tem-se: $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$

Desta forma,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

Portanto, para determinar as n colunas da matriz A^{-1} resolvemos n sistemas lineares utilizando qualquer método que resolva sistemas lineares.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Primeira coluna de } A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Segunda coluna de } A^{-1}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{n-ésima coluna de } A^{-1}$$

De forma resumida, seja $A^{-1} = [\ b_1 \vdots b_2 \vdots \cdots \vdots b_n\ ]$ a matriz inversa de A, tal que b_j, j = 1, 2, ..., n é a j-ésima coluna de A^{-1}. Além disso, considere e_j a *j*-ésima coluna da matriz identidade $I_{n\times n}$, ou seja, $I = [\ e_1 \vdots e_2 \vdots \cdots \vdots e_n\ ]$, tal que

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{j - ésima linha de } e.$$

Podemos escrever o sistema linear

$$Ab_j = e_j \qquad j = 1, 2, ..., n$$

Assim, resolvendo estes sistemas por qualquer método de sistemas lineares (desde que suas condições sejam satisfeitas), encontramos cada coluna de A^{-1}.

Obtemos as colunas da A^{-1} fazendo:

1) **Método de Eliminação de Gauss**

$$A\, b_j = e_j\,, \qquad j = 1,...,n.$$

2) **Método de Decomposição LU**

$(L\ U)\, b_j = e_j$, $\quad j = 1,...,n.$

Resolvem-se os sistemas:

$$L\, y_j = e_j, \qquad j = 1,...,n.$$
$$U\, b_j = y_j,$$

3) **Método de Cholesky** (somente para matriz simétrica e positiva definida)

$$G\, G^T .\, b_j = e_j\,, \qquad j = 1,...,n.$$

Resolve-se os sistemas:

$$G\, y_j = e_j$$
$$G^T b_j = y_j\,, \qquad j = 1,...,n.$$

4) **Gauss Compacto**

Devemos utilizar o mesmo esquema da resolução de sistemas matriciais, isto é:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Fazendo AX = I, as colunas da matriz X são as colunas da matriz inversa, desde que $AA^{-1} = I$.

OBS: Se det(A) = 0, diz-se que a matriz A é não-inversível ou singular.

Exemplo:

1. Determine a inversa da matriz A utilizando algum método estudado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercícios

1 Resolva os sistemas lineares triangulares abaixo:

$$\text{a)}\begin{cases} 1x_1 & & & = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 & & & = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 & & & = 1 \end{cases}$$

$$\text{b)}\begin{cases} 1x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 1x_4 = 4 \\ \phantom{1x_1 - {}} 1x_2 + 3x_3 + 1x_4 = 3 \\ \phantom{1x_1 - 2x_2 + {}} 1x_3 + 1x_4 = 2 \\ \phantom{1x_1 - 2x_2 + 3x_3 + {}} 1x_4 = 1 \end{cases}$$

2 Resolva os sistemas lineares abaixo pelo Método de Eliminação de Gauss.

$$\text{a)}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 1x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{b)}\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 10 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 1x_4 = -1 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 3 \end{cases}$$

3 Resolva os sistemas lineares abaixo pelo Método de Gauss com Pivotamento Parcial.

$$\text{a)}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 - 1x_4 = 6.9 \\ -1x_1 + 1x_2 - 4x_3 + 1x_4 = -6.6 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 10.2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 1x_3 - 2x_4 = -12.3 \end{cases}$$

$$\text{b)}\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2 \\ -1x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ -1x_1 - 3x_2 - 1x_3 + 1x_4 = 3 \end{cases}$$

4 Resolva os sistemas lineares do exercício anterior pelo Método de Decomposição LU.

5 Resolva o sistema linear a seguir pelo Método de Gauss com Pivotamento Parcial.

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1x_4 = 1 \\ 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 3x_4 = -6 \\ -1x_1 + 3x_2 + 1x_3 - 5x_4 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 13 \end{cases}$$

6 Considere o seguinte conjunto esparso de equações lineares:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mostre que, usando o método de Eliminação de Gauss, o sistema triangular resultante permanece esparso. Um sistema linear como esse é chamado **tridiagonal**. Tais sistemas lineares aparecem com frequência na solução de equações diferenciais parciais.

7 Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Verifique se a matriz A satisfaz as condições da decomposição LU.
b) Decomponha A em LU.
c) Calcule o determinante de A.
d) Resolva o sistema A.x=b, onde $b = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

8 Resolva o sistema A.x=b pelo Método da Decomposição LU, em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

9 Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 1x_3 = -12 \\ -1x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

a) Resolva o sistema usando o método de decomposição LU.
b) Calcule o determinante de A pelo mesmo.

10 Quais das matrizes abaixo podem ser decompostas na forma LU? Decomponha as que forem possíveis.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 7 & 17 \end{pmatrix}$$

11 Seja $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Verifique se A pode ser decomposta em $G.G^T$ (Cholesky).
b) Decomponha A em $G.G^T$.
c) Calcule o determinante de A.
d) Resolva o sistema A.x=b, em que $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

12 Seja $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 10 & 8 & 4 \\ 8 & 8 & 12 & 10 \\ 4 & 4 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

a) Verifique se A pode ser decomposta em $G.G^T$.
b) Decomponha A em $G.G^T$.
c) Calcule o determinante de A.
d) Resolva o sistema A.x=b, em que $b = \begin{pmatrix} 32 \\ 26 \\ 38 \\ 30 \end{pmatrix}$.

13 Sejam as matrizes

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Escolha adequadamente e resolva um dos sistemas Ax = b, Bx = b, pelo processo de Cholesky, em que $b=(2 \quad 16 \quad 9)^T$.

14 Usando o Método de Eliminação de Gauss resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 10x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 10 \\ 1x_1 + 10x_2 + 1x_3 = 12 \\ 2x_1 - 1x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1x_4 = 1 \\ 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 3x_4 = -6 \\ -1x_1 + 3x_2 + 1x_3 - 5x_4 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 13 \end{cases}$

15 Resolva o sistema matricial usando o Método de Decomposição LU:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_{13} & z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ -7 & 6 & 6 \\ -11 & 2 & 20 \end{pmatrix}$$

16 Considere os sistemas lineares:

$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 4 \\ 2x_1 + 13x_2 + 1x_3 = 35 \\ -1x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6 \\ 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 14 \\ 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6 \end{cases}$

Faça uma escolha adequada para resolver um deles pelo método de Decomposição LU e o outro pelo método de Cholesky. Justifique sua resposta.

17 Resolva o sistema linear matricial pelo Método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

18 Considere o sistema linear A.x = b, em que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad e \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Para que valores de α:

a) A matriz A é pode ser decomposta no produto LU? Justifique.
b) O sistema pode ser resolvido por Cholesky? Justifique.
c) Considere $\alpha = 1$ e resolva o sistema linear obtido pelo método de Eliminação de Gauss.

19 Seja o sistema linear A.x = b dado por:

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Determine a inversa da matriz A pelo método de Eliminação de Gauss.
b) Resolva o sistema linear usando a matriz inversa obtida no item anterior.

20 Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule A^{-1} utilizando o Método de Eliminação de Gauss.

21 Usando decomposição LU, inverta a matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

22 Dada a matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcule A^{-1} utilizando o Método de Cholesky.

23 Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

usando o Método de Gauss com Pivotamento Parcial calcule A^{-1}.

24 Considere a matriz abaixo e calcule sua inversa usando o Método de Decomposição LU e Método de Eliminação de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

25. Utilizando **Cholesky**, encontre a inversa da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

26. Utilizando **Gauss Compacto**, encontre a inversa da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Métodos iterativos para solução de sistemas lineares

Métodos iterativos são aqueles que se baseiam na construção de sequências de aproximações. A cada passo, os valores calculados anteriormente são utilizados para reforçar a aproximação de modo que o resultado obtido geralmente é aproximado.

Pré – requisitos para os métodos iterativos

Normas de vetores

Chama-se norma de um vetor x, $\|\mathbf{x}\|$, qualquer função definida num espaço vetorial E, com valores em $\mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes condições:

N1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ e $\|\mathbf{x}\| = 0$ se e somente se x = 0.

N2) $\|\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}\| = |\lambda|\ \|\mathbf{x}\|$ para todo escalar λ.

N3) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ (desigualdade triangular).

Como exemplos de normas no $\mathbb{R}^n$ temos:

a) $\|x\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, b) $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$, c) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

Exemplo:

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 3 \\ 4 \\ -20 \end{pmatrix}$$. Obter $\|x\|_E$, $\|x\|_\infty$ e $\|x\|_1$.

$\|x\|_E =$

$\|x\|_\infty =$

$\|x\|_1 =$

Definição: Dada uma sequência de vetores $x^{(k)} \in$ E, dizemos que a sequência $\{x^{(k)}\}$ converge para $x \in$ E $\|x^{(k)} - x\| \to 0$, quando $k \to \infty$.

Norma de matrizes

O conjunto das matrizes (n × n), com as operações de soma de matrizes e produto de um escalar por uma matriz forma um espaço vetorial E de dimensão n^2.

Podemos então falar em norma de uma matriz $A \in E$.

Algumas normas de matrizes:

a) $\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (norma linha)

b) $\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (norma coluna)

c) $\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}^2}$ (norma euclidiana)

Exemplo de cálculo de normas:

Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\|A\|_\infty =$

$\|A\|_1 =$

$\|A\|_E = =$

Definição: Normas consistentes

Dada uma norma no $\mathbb{R}^n$ e uma norma de matrizes dizemos que elas são consistentes se, para qualquer x, $\|Ax\| \le \|A\| \, \|x\|$

Métodos iterativos

Um método iterativo para calcular a solução de um sistema Ax = b (det(A) ≠ 0) é denominado iterativo quando fornece uma sequência de soluções aproximadas, sendo que cada solução aproximada é obtida pela anterior.

De modo geral, a construção do método iterativo considera a transformação do sistema original Ax = b para a forma equivalente $x = Bx + g$ e posteriormente, a partir dessa nova forma e de uma solução aproximada inicial $x^{(0)}$, determinamos uma sequência de soluções aproximadas considerando o processo iterativo:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

em que B é a matriz iterativa (n × n) e g é o vetor (n × 1).

Método de Jacobi-Richardson

Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

em que a matriz A (det(A)≠0) do sistema linear pode ser escrita como a soma de três matrizes: A = L+D+R.

Escolhemos L, D e R de modo que L só tenha elementos abaixo da diagonal D só tenha elementos na diagonal R só tenha elementos acima da diagonal.

$$l_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i > j \\ 0, & i \le j \end{cases} \qquad d_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases} \qquad r_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i < j \\ 0, & i \ge j \end{cases}$$

Exemplo (3x3)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R}$$

Supondo det(D) ≠ 0 ($a_{ii} \neq 0$, i=1,...n) e dividindo cada linha pelo elemento da diagonal, temos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 1 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 1 \end{pmatrix}}_{A^*} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^* & 0 & 0 \\ a_{31}^* & a_{32}^* & 0 \end{pmatrix}}_{L^*} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12}^* & a_{13}^* \\ 0 & 0 & a_{23}^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R^*}$$

A construção da matriz A* foi exemplificada para o caso 3 × 3, porém, essa construção é válida para qualquer dimensão. Obviamente, os elementos b_i do vetor b também são divididos pelo elemento a_{ii}.

No caso geral temos:

$$l_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}^* = \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & , i > j \\ 0 & , i \le j \end{cases} \qquad r_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}^* = \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i < j \\ 0 & , i \ge j \end{cases} \qquad b_i^* = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

e o sistema linear é reescrito como:

$$(L^* + I + R^*)x = b^*$$
$$x = \underbrace{b^*}_{g} - \underbrace{(L^* + R^*)}_{B}\, x$$

O método iterativo de Jacobi-Richardson fica:

$$\boxed{x^{(k+1)} = b^* - (L^* + R^*)x^{(k)}}$$

Desta forma, dado o sistema linear, o Método de Jacobi consiste na determinação de uma sequência de aproximantes de índice k: $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, ...$ a partir de valores iniciais $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$, $k = 1, 2, 3, ...$ e através do processo definido por:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}.x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}.x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}.x_1^{(k)} - \cdots - a_{1n}.x_n^{(k)})/a_{22} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}.x_1^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}.x_{n-1}^{(k)})/a_{nn} \end{cases}$$

Critério de convergência do método de Jacobi:

- $\max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}} \left| \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$ (Critério das Linhas)
- $\max_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}} \left| \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| < 1$ (Critério das Colunas)

Critério de parada:

O método iterativo de Jacobi-Richardson para quando:

$$\frac{||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_\infty}{||x^{(k+1)}||_\infty} < \varepsilon$$

sendo ε um valor pré-estabelecido para a precisão.

OBS:

- Se a matriz for estritamente diagonal dominante (isto é, em cada linha, o elemento da diagonal é estritamente maior que a soma de todos os outros elementos da linha), então o critério de convergência é automaticamente atendido para B = -(L*+R*).

- A convergência **independe** de $x^{(0)}$.

- No método de Jacobi-Richardson todos os valores de *x* da iteração (k+1) dependem dos valores de *x* da iteração (k), por isso o método é também chamado de **Método dos deslocamentos simultâneos.**

Exemplo

Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & -8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 6 \end{cases}$$

Utilizando o método de Jacobi- Richardson com $x^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^T$ e precisão $\varepsilon = 10^{-2}$.

k	0	1	2	3	4
x_1					
x_2					
x_3					

OBS:

- Para $\varepsilon < 10^{-2}$ a solução do sistema é: $x = (\ 0.99\ ;\ -1.99\ ;\ 0.99)^T$;
- A solução exata do sistema proposto é $x = (\ 1, -2, 1)^T$.

Exercícios:

1. Resolver o sistema do exercício anterior com b =(14, 11, 8), $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ e com precisão $\varepsilon = 10^{-2}$.

2. Resolver o sistema: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ utilizando o método de Jacobi- Richardson com $x^{(0)} = (0.9; 0.9)$ e precisão $\varepsilon = 10^{-2}$. **Solução com 5 iterações: $x = (0.9968; 1.0031)^T$.**

Método de Gauss - Seidel

O método de Gauss – Seidel é uma variante do método de Jacobi – Richardson que acelera a busca da solução para o sistema.

No método de Jacobi–Richardson, o sistema linear Ax = b foi reescrito como x = Bx + g, com B = (L* + R*) e g = b*.

O processo iterativo foi descrito como: $x^{(k+1)} = b^* - (L^* + R^*)x^{(k)}$. Se explicitarmos as variáveis deste processo, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & (b_1 & - & \mathrm{a}_{12}.x_2^{(k)} & - & \dots & - & \mathrm{a}_{1n}.x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} & = & (b_2 & - & \mathrm{a}_{21}.x_1^{(k)} & - & \cdots & - & \mathrm{a}_{1n}.x_n^{(k)})/a_{22} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_n^{(k+1)} & = & (b_n & - & \mathrm{a}_{n1}.x_1^{(k)} & - & \cdots & - & \mathrm{a}_{n,n\text{-}1}.x_{n-1}^{(k)})/a_{nn} \end{cases}$$

Observe que quando calculamos $x_2^{(k+1)}$, já sabemos o valor de $x_1^{(k+1)}$ e, quando calculamos $x_3^{(k+1)}$, já sabemos $x_2^{(k+1)}$ e $x_1^{(k+1)}$. Em geral, sabemos os valores de x que multiplicam L*.

Como $x_1^{(k+1)}$ é uma melhor aproximação de x_1 do que $x_1^{(k)}$, podemos utilizá-lo no cálculo de $x_2^{(k+1)}$, assim como podemos utilizar $x_2^{(k+1)}$ e $x_1^{(k+1)}$ no cálculo de $x_3^{(k+1)}$. Desta forma, temos o método iterativo de Gauss – Seidel:

$$\boxed{x^{(k+1)} = b^* - L^* x^{(k+1)} - R^* x^{(k)}}$$

Assim como no método de Jacobi, dado o sistema linear, o Método de Gauss–Seidel consiste na determinação de uma sequência de aproximantes de índice k: $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$, $\mathrm{k} = 1, 2, 3, \dots$ a partir de valores iniciais $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, $\mathrm{k} = 1, 2, 3, \dots$ e através do processo definido por:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & (b_1 & - & \mathrm{a}_{12}.x_2^{(k)} & - & \dots & - & \mathrm{a}_{1n}.x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} & = & (b_2 & - & \mathrm{a}_{21}.x_1^{(k+1)} & - & \cdots & - & \mathrm{a}_{1n}.x_n^{(k)})/a_{22} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_n^{(k+1)} & = & (b_n & - & \mathrm{a}_{n1}.x_1^{(k+1)} & - & \cdots & - & \mathrm{a}_{n,n\text{-}1}.x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn} \end{cases}$$

Critério de convergência:

O método de Gauss–Seidel converge se:

- $\max\limits_{i} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \left| \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$ (Critério das Linhas) for satisfeito.

- Critério de Sassenfeld for satisfeito ($\max_i \beta_i < 1$), em que os valores β_i são calculados por recorrência através de $\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| . \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$

Critério de parada:

O método iterativo de Gauss–Seidel pára quando:

$$\frac{||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_\infty}{||x^{(k+1)}||_\infty} < \varepsilon$$

sendo ε um valor pré-estabelecido para a precisão.

OBS:

- Dado um sistema linear Ax = b pode acontecer que o método de jacobi-Richardson seja convergente enquanto que o método de Gauss-Seidel seja divergente e vice-versa.

- Se $\|B\|$ não for muito menor que 1, a convergência pode ser bastante lenta.

- A convergência para os métodos: Jacobi-Richardson e Gauss-Seidel não depende do valor inicial $x^{(0)}$.

- Uma permutação conveniente das linhas ou colunas de A antes de dividir cada equação pelo coeficiente da diagonal principal pode reduzir o valor de $\|B\|$.

Exemplo:

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ e $\varepsilon < 10^{-2}$.

k	0	1	2	3	4
x_1					
x_2					
x_3					

OBS:

- Para $\varepsilon < 10^{-2}$ temos que a solução do sistema é $x = (1.00; 0.99; -1.00)^t$
- A solução exata do sistema proposto é $x = (1, 1, -1)^T$.

Exercício:

Resolver o sistema: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ utilizando o método de Gauss-Seidel com $x^{(0)}$ = (0.9; 0.9) e precisão $\varepsilon = 10^{-2}$. **Solução com 4 iterações: $x = (1.0015; 0.9960)^T$.**

Exercícios:

1. Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

pelo método de Jacobi-Richardson com $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ e $\varepsilon < 10^{-3}$.

2. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 20 \\ 7x_1 + x_2 + 10x_3 = 20 \end{cases}$$

a) Verificar a possibilidade de aplicação do método iterativo de jacobi-Richardson.
b) Se possível, resolvê-lo pelo método do item a).

3. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Mostrar que reordenando as equações e incógnitas poderemos fazer com que o critério de Sassenfeld seja satisfeito, mas não o das linhas.

4. Dado o sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = -1 \end{cases}$$

a) Verificar a convergência usando o critério das linhas e o critério de Sassenfeld.
b) Resolva o sistema utilizando Jacobi e Gauss-Seidel com $x^{(0)}=(-2.4,\ 5.5,\ 0.8)^T$ e $\varepsilon=10^{-2}$.

Efetuar, em ambos os casos, duas iterações partindo-se do vetor $x^{(0)} = (-2.4;\ 5;\ 0.3)^t$.

5. Dado o sistema:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

a) Verificar a convergência usando o critério de Sassenfeld.
b) Resolver pelo Método de Gauss-Seidel (3 iterações a partir do vetor nulo).

6 Resolva o sistema linear abaixo pelo Método de Jacobi com $x^{(0)}=(0, 3, 1, 4)^T$ e $\varepsilon=10^{-3}$.

$$\begin{cases} 5.x_1 - 1.x_2 + 2.x_3 - 1.x_4 = 5 \\ 1.x_1 + 9.x_2 - 3.x_3 + 4.x_4 = 26 \\ 3.x_2 - 7.x_3 + 2.x_4 = -7 \\ -2.x_1 + 2.x_2 - 3.x_3 + 10.x_4 = 33 \end{cases}$$

7 Dado o sistema

$$\begin{cases} 10.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 = 10 \\ 2.x_1 + 10.x_2 + 8.x_3 = 20 \\ 7.x_1 + 1.x_2 + 10.x_3 = 20 \end{cases}$$

a) Verifique a possibilidade de aplicação do método iterativo de Jacobi.
b) Se possível, resolvê-lo com $x^{(0)} = (1, 2, -1)^T$ e $\varepsilon=10^{-3}$.

8 Dado o sistema A.x=b onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Verifique a convergência usando o critério de Sassenfeld.
b) Resolva pelo Método de Gauss-Seidel partindo do vetor nulo com $\varepsilon=10^{-2}$.

9 Resolva o sistema linear pelo Método de Gauss-Seidel com $x^{(0)}=(3, 1, 0, -1)^T$ e $\varepsilon=10^{-4}$.

$$\begin{cases} 4.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 + 1.x_4 = 7 \\ 2.x_1 - 8.x_2 + 1.x_3 - 1.x_4 = -6 \\ 1.x_1 + 2.x_2 - 5.x_3 + 1.x_4 = -1 \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 - 4.x_4 = -1 \end{cases}$$