INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por outra função $g(x)$, escolhida entre uma classe de funções definida a priori e que satisfaça algumas propriedades. A função $g(x)$ é então usada em substituição à função $f(x)$.

A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo:

- são conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado;
- a função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e a integração são difíceis (ou mesmo impossíveis) de serem realizadas.

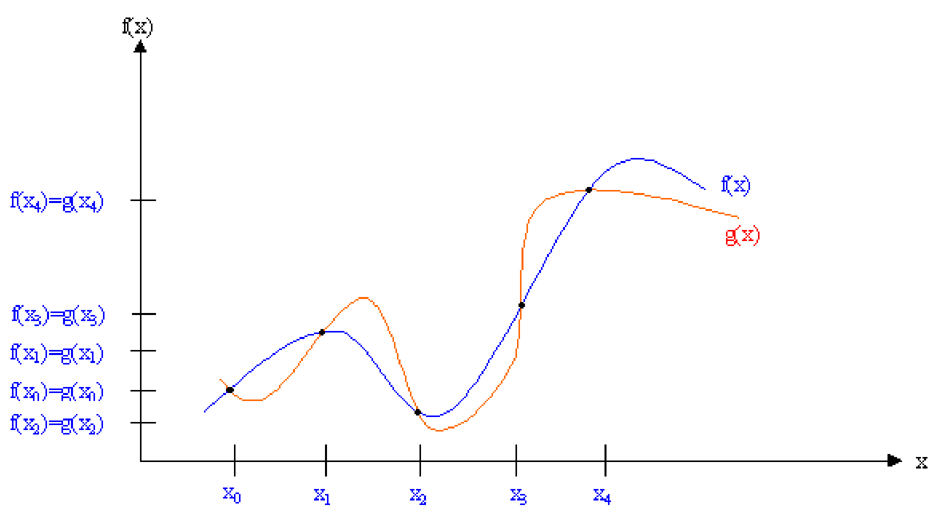
Interpretação geométrica

Considere (n +1) pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, chamamos *nós da interpolação*, e os valores de $f(x)$ nesses pontos: $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

A forma de interpolação de $f(x)$ consiste em se obter uma determinada função $g(x)$ tal que:

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ g(x_2) = f(x_2) \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

Para n = 4 (05 nós), temos a representação:



Interpolação Polinomial

A interpolação por meio de polinômios consiste em, dados (n+1) pontos distintos (x_0,$f(x_0)$), (x_1,$f(x_1)$), ..., (x_n,$f(x_n)$), aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau ≤ n, $p_n(x)$, tal que:

$$f(x_i) = p_n(x_i), i = 0,...,n$$

A representação de $p_n(x)$ é dada por:

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n.$$

Desta forma, obter $p_n(x)$ consiste em obter os coeficientes a_0, a_1, a_2, ..., a_n. Da condição $p_n(x_k) = f(x_k)$, $\forall$ k = 0, 1, 2, ..., n, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

com (n + 1) equações e (n + 1) variáveis: a_0, a_1, ..., a_n.

A matriz dos coeficientes do sistema é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Esta matriz é conhecia como matriz de Vandermonde e, portanto, desde que x_0, x_1, ..., x_n sejam pontos distintos, temos det (A) $\neq 0$ e, então, o sistema linear admite solução única.

Teorema: ***Existência e unicidade do Polinômio Interpolador***

Seja $f(x)$ definida em $x_0, x_1, \dots, x_n$, (n + 1) pontos distintos de um intervalo [a, b]. Então existe um único polinômio p(x) de grau menor ou igual a n tal que $p(x_i) = f(x_i) = y_i, i = 0,\dots,n$.

Forma de Lagrange do Polinômio de Interpolação

Seja $f(x)$ definida um intervalo [a, b] e sejam $x_0, x_1, \dots, x_n$, (n + 1) pontos distintos em [a, b] e $y_i = f(x_i)$, i = 0, ..., n.

Seja $p_n(x)$ o polinômio de grau $\leq$ n que interpola f em $x_0, \dots, x_n$. Podemos representar $p_n(x)$ na forma

$$p_n(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \dots + y_n\ell_n(x),$$

em que os polinômios $\ell_k(x)$ são de grau n. Para cada i, queremos que a condição $p_n(x_i) = y_i$ seja satisfeita, ou seja:

$$p_n(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \dots + y_n\ell_n(x) = y_i$$

A forma mais simples de se satisfazer esta condição é impor:

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 0 \ \ se\ k \neq i \\ 1 \ \ se\ k = i \end{cases}$$

Para satisfazer esta condição, definimos:

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$

Como o numerador de $\ell_k(x)$ é um produto de n fatores da forma $(x - x_i)$, i = 0, ..., n, i $\neq$ k, então ℓ_k é um polinômio de grau n e, assim, $p_n(x)$ é um polinômio de grau $\leq$ n.

A a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é dada por:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x) \text{ , em que } \ell_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}.$$

Exemplo:

Seja a tabela:

x	-1	0	3
$f(x)$	15	8	-1

a) Determine o polinômio de interpolação de Lagrange.

b) Calcule $f(1)$.

Exercício:

Dada a tabela:

x	0	0.5	1	1.5
f(x)	-1	-1.25	-3	-6.25

construir o polinômio de interpolação de Lagrange de $f(x)$ e calcular $f(0.6)$.

Polinômio: $p_3(x) = -3x^2 + x - 1$ e $p_3(0.6) \approx f(0.6) = -1.48$

Forma de Newton

Para a construção do polinômio de interpolação pelo método de Newton, precisamos do conhecimento de diferença dividida de uma função.

Diferença dividida

Seja f(x) uma função contínua, (n + 1) vezes diferenciável e definida em x_0, x_1, ..., x_n pontos distintos de um intervalo [a, b].

Definimos *diferença dividida* por:

$$\begin{cases} f[x_0] = f(x_0) & \text{(Ordem Zero)} \\ f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} & \text{(Ordem 1)} \\ f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} & \text{(Ordem 2)} \\ f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} & \text{(Ordem 3)} \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & \\ f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n] = \dfrac{f[x_1, x_2, \cdots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} & \text{(Ordem n)} \end{cases}$$

Podemos tabelar de forma conveniente as diferenças divididas, notando que as diferenças de ordem 1 são calculadas a partir da diferença de ordem zero, as diferenças de ordem 2, a partir da diferença de ordem 1 e, assim sucessivamente, como segue:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	.	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		.	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	.	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	.		$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$
		$f[x_3,x_4]$	.	.	.	
			.	.	.	
x_4	$f[x_4]$	.	.	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	.	
.	.	.	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
.	.	.				
.	.	$f[x_{n-1}, x_n]$				
x_n	$f[x_n]$					

Exemplo:

Seja f(x) tabelada:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	29	30	31	62

Construção da tabela:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-1					
0					
1					
2					
3					

Propriedade:

- $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ é simétrica nos argumentos, ou seja, $f[x_0, x_1, ..., x_n] = f[x_{j0}, x_{j1}, ..., x_{jn}]$, em que $j_0, j_1, ..., j_n$ é qualquer permutação dos inteiros 0, 1, ..., n. Por exemplo,

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0]-f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0].$$

Para k = 2 teremos:

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_2, x_1] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_0, x_1] = f[x_2, x_1, x_0].$$

Forma de Newton do Polinômio de Interpolação

Considere uma função $f(x)$ contínua definida em $x_0, x_1, ..., x_n$ (n + 1) pontos distintos de um intervalo [a, b]

Determinando as diferenças divididas de f(x) nos pontos x_0 e x, temos:

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow (x - x_0) f[x_0, x] = f(x) - f(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{p_o(x)} + \underbrace{(x - x_0) f[x_0, x]}_{E_0(x)}$$

$\Rightarrow E_0(x) = f(x) - p_0(x) = (x - x_0) f[x_0, x]$ (erro cometido ao aproximar f(x) por p_0(x))

Da mesma forma, considerando os pontos x_0, x_1 e x, temos:

$$f[x_0, x_1, x] = f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} =$$

$$= \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f[x_1, x_0]}{(x - x_1)(x - x_0)}$$

$$\Rightarrow f[x_0, x_1, x] = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f[x_1, x_0]}{(x - x_0)(x - x_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0]}_{p_1(x)} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x]}_{E_1(x)}$$

Verificação: $p_1(x)$ interpola f(x) em x_0 e em x_1?

$p_1(x_0) = f(x_0)$

$p_1(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1).$

Para construir $p_2(x)$, polinômio de grau ≤ 2 que interpola $f(x)$ em x_0, x_1, x_2, temos:

$f[x_0, x_1, x_2, x] = f[x_2, x_1, x_0, x] = \dfrac{f[x_1, x_0, x] - f[x_2, x_1, x_0]}{x - x_2} =$

$$= \frac{\dfrac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} - f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_2)} = \frac{\dfrac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} - f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_2)} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f[x_1, x_0] - (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} \Rightarrow$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + +(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x]$$

Então,

$$p_2(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1]}_{p_1(x)} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]}_{q_2(x)} \text{ e}$$

$E_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x]$.

Aplicando sucessivamente o mesmo raciocínio para todos os pontos tabelados, temos a forma de Newton para o polinômio de grau $\leq$ n que interpola $f(x)$ em $x_0, \ldots, x_n$:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \ldots +$$
$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

e o erro é dado por: $E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]$

Teorema:

Seja $f(x)$ uma função contínua. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, (n + 1) pontos distintos de [a, b], então:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \ldots +$$
$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

é o polinômio interpolador de Newton para a função $f(x)$ sobre os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Exemplo:

Usando a forma de Newton, construir o polinômio que interpola f(x) nos pontos tabelados e calcular f(0.3).

x	0	0.2	0.4
$f(x)$	1	2	4

Exercício:

Dada a tabela:

x	0	0.5	1	1.5
f(x)	-1	-1.25	-3	-6.25

construir o polinômio de interpolação de Newton de $f(x)$ e calcular $f(0.6)$.

Forma de Newton-Gregory para o polinômio interpolador.

No caso em que os nós da interpolação $x_0, x_1, ..., x_n$ são igualmente espaçados, podemos usar a forma de Newton-Gregory para obter $p_n(x)$.

Seja f(x) uma função contínua no intervalo [a, b] e sejam $x_0, x_1, ..., x_n$ os (n + 1) pontos de [a, b] que se sucedem compasso h, isto é, $x_j = x_0+j_h$. Chamamos operador de diferenças ordinárias:

$$
\begin{aligned}
&\Delta^0 f(x) = f(x)\\
&\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)\\
&\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x)
\end{aligned}
$$

Desde que conhecemos f(x) e seus valores sejam conhecidos em $x_0, x_1, ..., x_n$, podemos construir uma tabela de diferenças ordinárias:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
x_0	$f(x_0)$		
		$\Delta f(x_0)$	
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$
		$\Delta f(x_1)$	

x_2	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$
			.
		$\Delta f(x_2)$	.
		.	.
x_3	$f(x_3)$	.	
.	.	.	
.	.		
.	.		

Exemplo:

Construir a tabela de diferenças ordinárias da função f(x) a partir da tabela:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	1	2	3	-1

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
-1				
0				
1				
2				

Teorema:

Seja f(x) uma função contínua e (n + 1) vezes diferenciável em um intervalo [a, b]. Sejam $x_0, x_1, ..., x_n$ os (n + 1) pontos distintos e igualmente espaçados em [a, b]. Então

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n n!}.$$

Demonstração (por indução)

Para n = 1

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{h(1!)}$$

Supondo que f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}] = $\dfrac{\Delta^{n-1} f(x_0)}{h^{(n-1)}(n-1)!}$, temos

f[x_0, x_1, ..., x_n] = $\dfrac{f[x_1, x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0} =$

$$= \frac{\dfrac{\Delta^{n-1} f(x_1)}{h^{n-1}(n-1)!} - \dfrac{\Delta^{(n-1)} f(x_0)}{h^{n-1}(n-1)!}}{nh} = \frac{\Delta^{n-1} f(x_0 + h) - \Delta^{n-1} f(x_0)}{h^{n-1} f(n-1)! nh} = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n n!}$$

Polinômio interpolador de Newton-Gregory

O polinômio interpolador de Newton-Gregory é dado por:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} + ...+$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1) ... (x - x_{n-1})\frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n n!}.$$

OBS: A forma de Newton-Gregory para $p_n(x)$ pode ser simplificada, se usarmos uma mudança de variáveis:

$$s = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow x = sh - x_0$$

como os pontos são equidistantes, $x_j = x_0 + j_h$. Desta forma, temos:

$$(x - x_j) = sh + x_0 - (x_0 + jh) = (s - j)h.$$

Assim, temos a seguinte forma geral para $p_n(x)$:

$$p_n(s) = f(x_0) + s\,\Delta f(x_0) + s(s-1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2} + \ldots + s(s-1)\ldots(s-n+1)\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}.$$

Exemplo:

Determine o polinômio de interpolação de Newton-Gregory da função tabelada e calcule f(0.5):

x	-2	-1	0	1
f(x)	4	3	1	-1

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
-2				
-1				
0				
1				

Exercício:

Determine o polinômio de interpolação de Newton-Gregory da função tabelada e avalie f(0.35):

x	0.1	0.2	0.3	0.4
f(x)	1.01	1.05	1.12	1.23

$p_3(s) = 0.00017s^3+0.0099s^2+0.0284s+1.01$ e $f(0.35) = 1.1694$

Interpolação Linear

A interpolação linear, é um caso particular de interpolação, pois ocorre em apenas 2 pontos distintos.

Considere uma função $f(x)$ definida em dois pontos x_0 e x_1. Seja $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ dois pontos distintos, assim, n = 1 e, por isto, a interpolação por dois pontos é chamada *interpolação linear*.

Usando a forma de Lagrange podemos construir o polinômio interpolador de grau ≤ 1, que é dado por:

$$p_1(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x)$$

em que

$$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}, \qquad \ell_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}.$$

Assim, $p_1(x) = y_0 \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1 \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$, ou seja, $p_1(x) = \frac{(x-x_1)\,y_0 + (x-x_0)\,y_1}{(x_1-x_0)}$

que é exatamente a equação da reta que passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

Exemplo 1:

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x+1}$ tabelada nos pontos:

x	1	2
f(x)	1/2	1/3

Determine o polinômio interpolador e avalie f(1.5).

Exemplo 2:

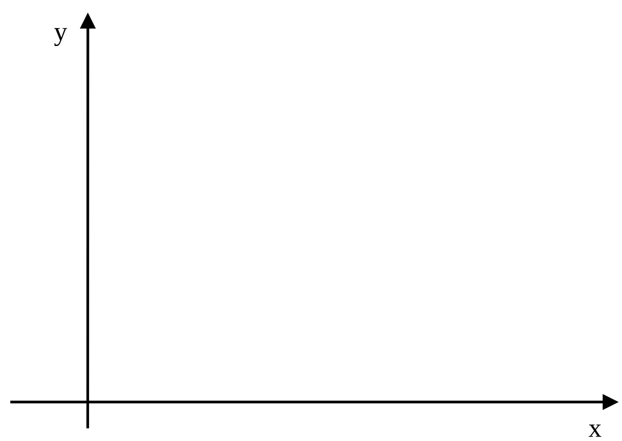
Utilize interpolação polinomial para calcular um valor aproximado de ln(3.7). Faça interpolação sobre 2 e 3 pontos.

x	1	2	3	4
ln(x)	0	0.6931	1.0986	1.3863

Estudo do erro na Interpolação

Embora o polinômio interpolador p(x) coincida com a função nos pontos de interpolação, x_0, x_1, ..., x_n, espera-se que $p(\bar{x}) \cong f(\bar{x})$ para $\bar{x} \neq x_i$, i = 0, 1, ..., n, ou seja, estimando f(x) pelo polinômio interpolador cometemos um erro nesta aproximação dado por:

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - p_n(\bar{x})$$



Teorema: Resto de Lagrange

Seja $f(x)$ uma função definida em x_0, x_1, ..., x_n, (n + 1) pontos distintos de um intervalo [a, b] e (n + 1) vezes diferenciável. Se p(x) interpola $f(x)$ nesses pontos, então o erro cometido E(x) é dado por:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

em que $\xi_x \in (x_0, x_n)$.

Limitante Superior para o erro

Na expressão do erro, $(E_n(x))$ o parâmetro ξ_x nunca é conhecido no intervalo I = $[x_0, x_n]$ e, portanto, não é possível calcular o valor numérico de $f^{(n+1)}(\xi)$. Desta forma, um limitante superior para o erro é dado por:

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \le |(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

em que $M_{n+1} = \max\limits_{x \in I} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

Se os pontos forem igualmente espaçados, ou seja, $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$, então

$$|f(x) - p_n(x)| < \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)}.$$

Exemplo:

Seja $f(x) = e^x + x - 1$ tabelada abaixo. Obter f(0.7) por interpolação linear e um LS para o erro.

x	0	0.5	1.0	1.5
$f(x)$	0.0	1.1487	2.7183	4.9811

Estimativa para o erro

Se a função f(x) é dada na forma de tabela, o valor absoluto do erro $|E_n(x)|$ só pode ser estimado, pois, não é possível calcular M_{n+1}. Entretanto, se construirmos a tabela de diferenças divididas até ordem n + 1, podemos usar o maior valor (em módulo) destas diferenças como uma aproximação para $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$ no intervalo $[x_0, x_n]$.

Neste caso, dizemos que:

$$|E_n(x)| \approx |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \text{ (máx | diferenças divididas de ordem n + 1|)}$$

Exemplo: Seja f(x) dada na forma:

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6
f(x)	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32

a) Obter f(0.47) usando um polinômio de grau 2.
b) estimar o erro.

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
0.2					
0.34					
0.4					
0.52					

0.6 |

Exercícios

1 Calcule um valor aproximado para cos(0,52) utilizando a Fórmula de Lagrange para os pontos -1, 0, 1 e 2.

2 Considere a função y = f(x) definida pela tabela:

x	-2	0	1	2	3
f(x)	1,3	2	-2,3	-1,3	2,5

Calcule um valor aproximado para f(0,16).

3 As densidades do sódio para três temperaturas são dadas a seguir:

i	Temperatura T_i	Densidade $\square_i$
0	94ºC	929 kg/m^3
1	205ºC	902 kg/m^3
2	371ºC	860 kg/m^3

Utilizando a Fórmula de Interpolação de Lagrange, estime o valor aproximado da densidade para T = 247ºC.

4 Um pára-quedista realizou seis saltos, saltando de alturas distintas em cada salto. Foi testada a precisão de seus saltos em relação a um alvo de raio de 5m, de acordo com a altura. A distância apresentada na tabela abaixo é relativa a circunferência.

ALTURA (m)	DISTÂNCIA DO ALVO (m)
1º salto: 1500	35
2º salto: 1250	25
3º salto: 1000	15
4º salto: 750	10
5º salto: 500	7

Levando em consideração os dados acima, a que provável distância do alvo cairia o pára-quedista se ele saltasse de uma altura de 900m?

5 Um veículo de fabricação nacional, após vários testes, apresentou os resultados a seguir, quando se analisou o consumo de combustível de acordo com a velocidade média imposta ao veículo. Os testes foram realizados em rodovia em operação normal de tráfego, numa distância de 76 km.

Velocidade (km/h)	Consumo (km/h)
55	14,08
70	13,56
85	13,28
100	12,27
120	11,30
140	10,40

Verifique o consumo aproximado para o caso de ser desenvolvida a velocidade de 80 km/h.

6 Seja f(x) dada na forma tabelar

x	0,20	0,34	0,40	0,52	0,60	0,72
f(x)	0,16	0,22	0,27	0,29	0,32	0,37

Obtenha f(0,50) usando um polinômio de grau 2.

7 Dada a tabela

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\mathbf{y = e^x}$	1	1,1052	1,2214	1,3499	1,4918	1,6487

Obtenha x, tal que $e^x = 1{,}3651$.

8 Construa uma tabela para a função f(x) = sen(x) usando os pontos 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3. Estime o valor de sen(1,15) usando um polinômio de 3º grau.

9 Determine o valor aproximado de f(0,4), usando todos os pontos tabelados da função f(x). Utilize a Fórmula de Interpolação de Newton.

x	**y**
0,0	1,008
0,2	1,064
0,3	1,125
0,5	1,343
0,6	1,512

10 Dada a tabela abaixo, calcule $e^{2,91}$ usando um polinômio de interpolação sobre três pontos.

x	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8
$\mathbf{e^x}$	11,02	13,46	16,44	20,08	24,53	29,96	36,59	44,70

11 Durante três dias consecutivos foi tomada a temperatura (em ºC) numa região de uma cidade, por quatro vezes no período das 6 às 12 horas. Determine, usando todos os dados da tabela abaixo, a média das temperaturas dos três dias às 9 horas.

	Dia		
Hora	**1**	**2**	**3**
6	18	17	18
8	20	20	21
10	24	25	22
12	28	27	23

12 Determine, usando todos os valores conhecidos das funções F(x) e G(x), o valor de F(G(0,23)).

x	**F(x)**
1,0	0,00
1,1	0,21
1,3	0,69
1,6	1,56
2,0	3,00

x	**G(x)**
0,0	1,001
0,2	1,083
0,4	1,645
0,6	3,167
0,8	6,129

13 Um automóvel percorreu 160 km numa rodovia que liga duas cidades e gastou, neste trajeto, 2 horas e 20 minutos. A tabela abaixo dá o tempo gasto e a distância percorrida em alguns pontos entre as duas cidades.

Tempo (min)	Distância (km)
0	0
10	8
30	27
60	58
90	100
120	145
140	160

Determine:

a) Qual foi aproximadamente à distância percorrida pelo automóvel nos primeiros 45 minutos de viagem, considerando apenas os quatro primeiros pontos da tabela?

b) Quantos minutos o automóvel gastou para chegar à metade do caminho?

14 Construa a tabela de log(x), usando 6 pontos igualmente espaçados, de tal forma que $x_0=2$ e $x_5=3$. Determine o valor aproximado de x tal que log(x) = 0,45.

15 Na tabela abaixo está assinalado o número de habitantes de Belo Horizonte nos censos de 1950, 1960, 1970 e 1980. Determine o número aproximado de habitantes de Belo Horizonte em 1975.

Ano	**1950**	**1960**	**1970**	**1980**
Nº de habitantes	352.724	683.908	1.235.030	1.814.990

16 Seja a função $\dfrac{2\,\mathrm{sen}^2 x}{x+1}$. Determine:

a) f(π/16) b) f(11π/18)

utilizando apenas os valores disponíveis na tabela abaixo:

i	x_i	$\mathrm{sen}(x_i)$
0	0	0,00
1	π/6	0,50
2	π/4	0,71
3	π/3	0,87
4	π/2	1,00

17 Use os valores de $e^{0.0}$, $e^{0.2}$, $e^{0.4}$ para determinar o valor aproximado de $e^{0.1}$.

18 A velocidade v (m/s) de um foguete lançado do solo foi medida quatro vezes, t segundos após o lançamento, e os dados foram registrados na tabela abaixo. Calcule usando um polinômio de 4º grau, a velocidade aproximada do foguete após 25 segundos do lançamento.

Tempo (s)	**0**	**8**	**20**	**30**	**45**
Velocidade (m/s)	0,000	52,032	160,450	275,961	370,276

19 Na tabela abaixo, **D** é a distância, em metros, que uma bala percorre ao longo do cano de um canhão em t segundos. Determine a distância percorrida pela bala 3 segundos após ter sido disparada, usando todos os dados abaixo.

Tempo (s)	0	2	4	6	8
D (m)	0,000	0,049	0,070	0,087	0,103