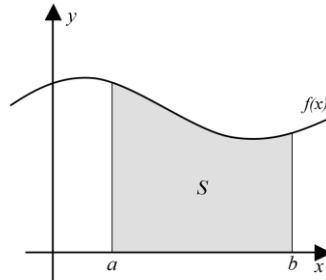


INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

No cálculo, a integral de uma função foi criada originalmente para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano. Ela também surge naturalmente em dezenas de problemas de Física, como por exemplo, na determinação da posição em todos os instantes de um objeto, se for conhecida a sua velocidade instantânea em todos os instantes.



Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a,b]$ e sua primitiva $F(x)$ conhecida. A integral definida de $f(x)$ pode ser calculada pela fórmula de Newton-Leibniz:

$$\int_a^b f(x)dx = f|_a^b = F(b) - F(a)$$

Porém, essa técnica não pode ser aplicada quando se conhece apenas alguns pontos tabelados da função $f(x)$ ou, quando $f(x)$ não pode ser integrada. Portanto, os métodos de integração numérica permitem calcular o valor aproximado de uma integral definida sem conhecer uma expressão analítica para a sua primitiva.

Integrar numericamente uma função $y = f(x)$ num intervalo $[a, b]$ pode ser o mesmo que integrar um polinômio $P_n(x)$ que aproxime $f(x)$ em um determinado intervalo.

Fórmulas de Newton – Cotes

Considere uma função definida em x_0, x_1, \dots, x_n ($n + 1$) pontos distintos e equidistantes no intervalo $[a, b]$. Para a determinação das fórmulas de Newton-Cotes utiliza-se o polinômio interpolador de Newton-Gregory para pontos equidistantes:

$$P_n(s) = f(x_0) + s \Delta f(x_0) + s(s-1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} + \dots + s(s-1) \dots (s-n+1) \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}.$$

em que $s = \frac{x - x_0}{h}$.

Aproximando a função $f(x)$ pelo polinômio de Newton-Gregory $p_n(s)$ e integrando-o, obtém-se as fórmulas de Newton-Cotes.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &\cong \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] = \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{aligned}$$

Erro Cometido na Integração Numérica

Teorema

Se $f(x)$ possui $(n+1)$ derivadas contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$ e os pontos $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, 1, \dots, n$ subdividem o intervalo de integração em um número ímpar de intervalos iguais, então a expressão do erro para as fórmulas de Newton-Cotes com n ímpar é dada por:

$$E_n = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n (u-1)\dots(u-n) du \quad \text{para algum ponto } \xi \in [x_0, x_n]$$

Teorema

Se $f(x)$ possui $(n+2)$ derivadas contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$ e os pontos $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, 1, \dots, n$ subdividem o intervalo de integração em um número par de intervalos iguais, então a expressão do erro para as fórmulas de Newton-Cotes com n par é dada por:

$$E_n = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n \left(u - \frac{n}{2}\right) u(u-1)\dots(u-n) du \quad \text{para algum ponto } \xi \in [x_0, x_n]$$

Regra dos Trapézios

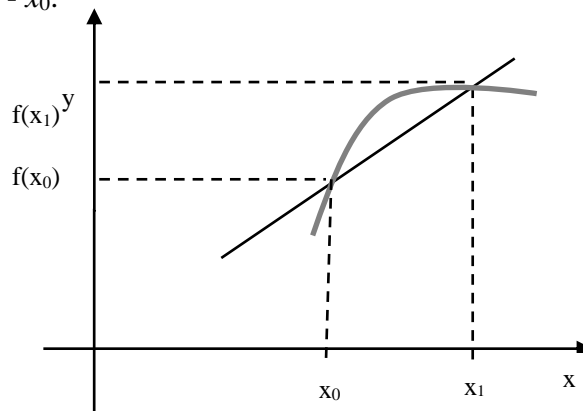
Considere uma função $f(x)$ contínua e definida em dois pontos x_0 e x_1 no intervalo $[a,b]$. Para a determinação da Regra dos Trapézios utiliza-se o polinômio de Newton-Gregory do 1º grau, que é dado por:

$$P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

e assim, para $a = x_0$ e $b = x_1$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx = h \int_0^1 P_1(s) ds$$

em que $s = \frac{x - x_0}{h}$ e $h = x_1 - x_0$.



Integrando $P_1(s)$, obtemos uma fórmula de integração da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\cong h \int_0^1 [f(x_0) + s \Delta f(x_0)] ds = h \int_0^1 f(x_0) ds + h \int_0^1 \Delta f(x_0) s ds = \\ &= h \int_0^1 f(x_0) ds + h \int_0^1 [f(x_1) - f(x_0)] \frac{s^2}{2} ds = h f(x_0) s \Big|_0^1 + h [f(x_1) - f(x_0)] \frac{s^2}{2} ds = \\ &= h f(x_0) + \frac{h}{2} [f(x_1) - f(x_0)] = \frac{1}{2} (2hf(x_0) + hf(x_1) - hf(x_0)) = \frac{h}{2} [f(x_1) + f(x_0)] \end{aligned}$$

Portanto: $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_1) + f(x_0)]$

Erro na regra dos trapézios

O intervalo $n = 1$ é ímpar e, portanto:

$$E_1 = \frac{h^3 f^{(2)}(\xi)}{2!} \int_0^1 u(u-1) du, x_0 \leq \xi \leq x_1 \Rightarrow E_1 = \frac{-h^3 f^{(2)}(\xi)}{12}$$

Limitante superior para o erro

$$|E_1| \leq \frac{h^3}{12} \max\{|f^{(2)}(x)| / x_0 \leq x \leq x_1\}$$

Exemplo:

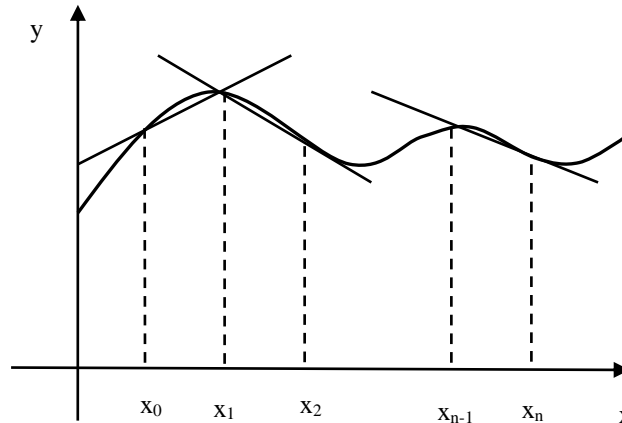
Dada a tabela

x	0.5	1
$f(x)$	-0.1931	1

Calcule o valor aproximado de $\int_{0,5}^1 (\ln(x) + x) dx$ usando a regra dos trapézios e um Limitante Superior para o erro.

Regra dos Trapézios generalizada

A regra dos trapézios generalizada consiste na subdivisão do intervalo de integração e n subintervalos iguais, cada qual de amplitude $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ e a aplicação da Regra dos Trapézios em cada subintervalo, isto é, a cada 2 pontos consecutivos.



Assim, temos que:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \cong \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2} [f(x_1) + f(x_2)] + \dots + \frac{h}{2} [f(x_{n-1}) + f(x_n)] =$$

$$= \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Erro na regra dos trapézios generalizada

$$E_t = \frac{h^2}{12} (x_n - x_0) f^{(2)}(\xi), \xi \in [x_0, x_1]$$

Limitante superior para o erro

$$|E_t| \leq \frac{h^2}{12} (x_n - x_0) \max \{ |f^{(2)}(x)| \mid x_0 \leq x \leq x_n \}$$

Exemplo:

Calcule o valor aproximado da integral $\int_1^4 \sqrt{x} dx$ usando a regra dos trapézios generalizada para 2, 4 e 6 subintervalos e um limitante superior para o erro.

Exercícios

- 1 Calcule o valor de $\int_{-1}^1 (x^3 + 1) dx$ pela Regra dos Trapézios usando 5 divisões no intervalo $[a,b]$.
- 2 Usando a Regra dos Trapézios determine o valor de $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ com 6 subintervalos. Compare o resultado com o valor de $\ln(3)$.

Regra 1/3 de Simpson

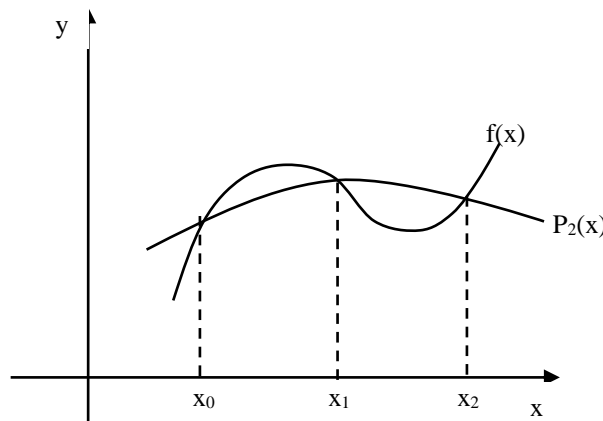
Considere uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$, definida em 3 pontos distintos x_0, x_1, x_2 equidistantes. Para determinar a Regra 1/3 de Simpson utiliza-se o polinômio de Newton-Gregory de grau 2, que é dado por:

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) \Delta f(x_0) + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}$$

Fazendo $a = x_0$ e $b = x_n$, temos:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x) dx = h \int_0^2 P_2 ds$$

em que $s = \frac{x - x_0}{h}$ e $h = \frac{x_n - x_0}{n}$.



Integrando $P_2(s)$, obtemos uma fórmula de integração da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= h \int_0^2 \left[f(x_0) + s \Delta f(x_0) + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) \right] ds = \\ &= h \int_0^2 f(x_0) ds + h \int_0^2 s \Delta f(x_0) ds + \int_0^2 \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) ds = \\ &= h f(x_0) s \Big|_0^2 + h(f(x_1) - f(x_0)) \frac{s^2}{2} \Big|_0^2 + \frac{h}{2} (f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)) \left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \\ &= 2h f(x_0) + 2h f(x_1) - 2h f(x_0) + \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} (f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)) = \\ &= 2h f(x_1) + \frac{h}{3} [f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)] = \frac{h}{3} [6f(x_1) + f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \end{aligned}$$

Portanto: $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$

Erro na regra 1/3 de Simpson

O intervalo de integração foi subdividido em um número $n = 2$ (par de intervalos) e, portanto:

$$E_2 = \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_0^2 (u-1).u(u-1).(u-2)du \Rightarrow E = \frac{-h^5 f^{(4)}(\xi)}{90} \quad x_0 \leq \xi \leq x_2$$

Limitante superior para o erro

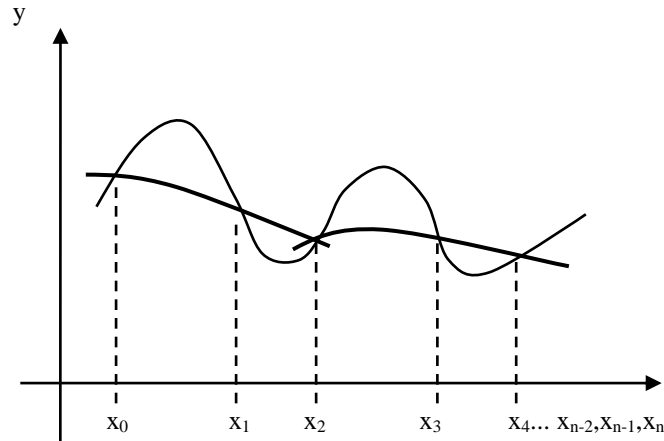
$$|E_2| \leq \frac{h^5}{90} \{ \max |f^{(4)}|, x_0 \leq x \leq x_2 \}$$

Exemplo:

Calcule o valor aproximado de $\int_{0,5}^{1,5} \cos x dx$ usando a Regra 1/3 de Simpson e um Limitante Superior para o erro.

Regra 1/3 de Simpson generalizada

A regra 1/3 de Simpson generalizada consiste na subdivisão do intervalo de integração e n subintervalos iguais, cada qual de amplitude $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, em que n é um número **par** de subintervalos, de forma que $a = x_0$ e $b = x_n$ e a aplicação da Regra 1/3 de Simpson a cada 2 subintervalos consecutivos.



Aplicando a regra 1/3 de Simpson a cada 2 subintervalos, temos que:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &\cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \\ &+ \dots + \frac{h}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] = \\ &= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{aligned}$$

Erro na regra 1/3 de Simpson generalizada

$$E = \frac{-h^4}{180}(x_n - x_0)f^{(4)}(\xi), x_0 \leq \xi \leq x_n$$

Limitante superior para o erro

$$|E| \leq \frac{h^4}{180}(x_n - x_0) \max\{|f^{(4)}(x)|, x_0 \leq x \leq x_n\}$$

Exemplo:

Calcule o valor aproximado da integral $\int_0^3 (xe^x + 1)dx$ usando a regra 1/3 de Simpson generalizada para 2, 4 e 6 subintervalos e um limitante superior para o erro.

Exercícios

- 1 Calcule o valor de $\int_{-1}^1 (x^3 + 1) dx$ pela Regra 1/3 de Simpson usando 5 divisões no intervalo $[a,b]$.
- 2 Usando a Regra 1/3 de Simpson determine o valor de $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ com 6 subintervalos. Compare o resultado com o valor de $\ln(3)$.

Regra 3/8 de Simpson

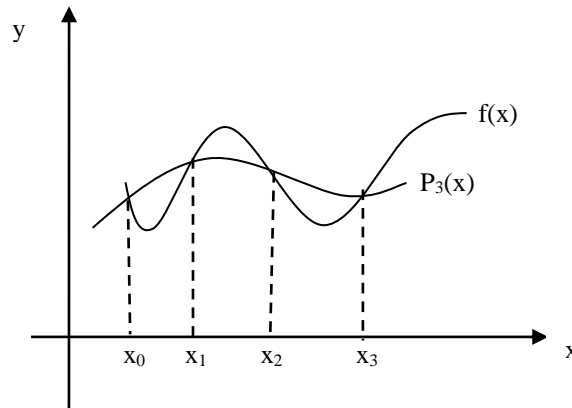
Considere uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$, definida em x_0, x_1, x_2, x_3 , 4 pontos distintos e equidistantes. Para determinar a Regra 1/3 de Simpson utiliza-se o polinômio de Newton-Gregory de grau 3, que é dado por:

$$P_3(x) = f(x_0) + (x - x_0) \Delta f(x_0) + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3}$$

Fazendo $a = x_0$ e $b = x_n$, temos:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_3} p_3(x) dx = h \int_0^3 P_3 ds$$

em que $s = \frac{x - x_0}{h}$ e $h = \frac{x_n - x_0}{n}$.



Integrando $P_3(s)$, obtemos uma fórmula de integração da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx &\cong h \int_0^3 \left[\Delta^0 f(x_0) + u \Delta f(x_0) + u(u-1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} + u(u-1)(u-2) \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!} \right] du = \\ &= h \int_0^3 \Delta^0 f(x_0) du + h \int_0^3 u \Delta f(x_0) du + \frac{h}{2} \int_0^3 u(u-1) \Delta^2 f(x_0) du + \frac{h}{6} \int_0^3 u(u-1)(u-2) \Delta^3 f(x_0) du = \\ &= h f(x_0) u \Big|_0^3 + h \left[f(x_1) - f(x_0) \right] \frac{u^2}{2} \Big|_0^3 + \frac{h}{2} \left[f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0) \right] \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} \right) \Big|_0^3 + \\ &+ \frac{h}{6} \left[f(x_3) - 3f(x_2) + 3f(x_1) - f(x_0) \right] \left(\frac{u^4}{4} - u^3 + u^2 \right) \Big|_0^3 = \frac{3h}{8} \left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right] \end{aligned}$$

Portanto:
$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8} \left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right]$$

Erro na regra 3/8 de Simpson

Para esta regra de integração, o intervalo $[a, b]$ foi subdividido em um número $n = 3$, ímpar, de subintervalos, portanto:

$$E_3 = \frac{h^5}{4!} f^{(4)}(\xi) \int_0^3 u(u-1)(u-2)(u-3) du \Rightarrow E_3 = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi), x_0 \leq x \leq x_3$$

Limitante superior para o erro

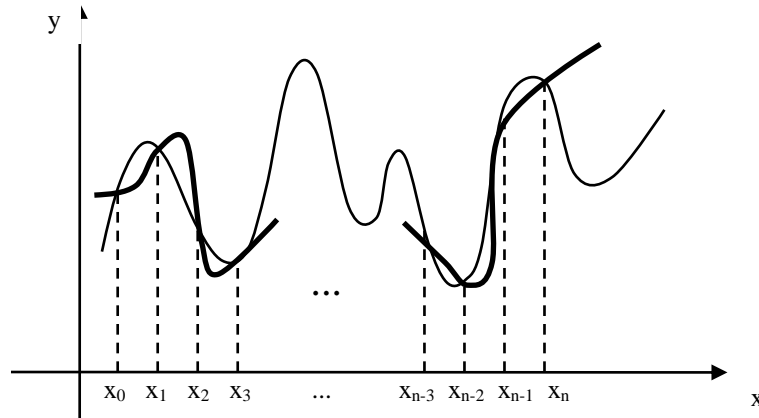
$$|E_3(x)| \leq \frac{3}{80} h^5 \max\{|f^{(4)}(x)|, x_0 \leq \xi \leq x_3\}$$

Exemplo:

Calcule o valor aproximado de $\int_{0,3}^{1,2} (e^x + 5x) dx$ usando a Regra 3/8 de Simpson e um Limitante Superior para o erro.

Regra 3/8 de Simpson generalizada

A regra 3/8 de Simpson generalizada consiste na subdivisão do intervalo $[a, b]$ de integração e n subintervalos iguais, cada qual de amplitude $h = \frac{x_0 - x_n}{n}$, em que n é um número múltiplo de 3, de forma que $a = x_0$ e $b = x_n$ e a aplicação da Regra 3/8 de Simpson a cada 4 pontos consecutivos, ou 3 subintervalos consecutivos.



Aplicando a regra 3/8 de Simpson a cada 2 subintervalos, temos que:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] + \frac{3h}{8} [f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)] + \dots + \frac{3h}{8} [f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n)] =$$

$$\therefore \frac{3h}{8} \{ f(x_0) + 3[f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] + 2[f(x_3) + f(x_6) + \dots + f(x_{n-3})] + f(x_n) \}$$

Erro na regra 3/8 de Simpson generalizada

$$E = \frac{h^4}{80} (x_n - x_0) f^{(4)}(\xi), x_0 \leq \xi \leq x_n$$

Limitante superior para o erro

$$|E| \leq \frac{h^4}{80} (x_n - x_0) \max\{|f^{(4)}(x)|, x_0 \leq x \leq x_n\}$$

Exemplo:

Calcule o valor aproximado da integral $\int_1^7 \ln(x+9)dx$ usando a regra 3/8 de Simpson generalizada para 3, 6 e 9 subintervalos e um limitante superior para o erro.

Exercícios

- 1 Calcule o valor de $\int_{-1}^1 (x^3 + 1) dx$ pela Regra 3/8 de Simpson usando 5 divisões no intervalo $[a,b]$.
- 2 Usando a Regra 3/8 de Simpson determine o valor de $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ com 6 subintervalos. Compare o resultado com o valor de $\ln(3)$.

Exercícios

- 1 Calcule as integrais a seguir pela Regra dos Trapézios, 1/3 de Simpson e 3/8 de Simpson, usando quatro e seis divisões de $[a,b]$. Compare os resultados.

a) $\int_0^1 e^x dx$

c) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

b) $\int_{-1}^1 (3x^3 - 3x + 1) dx$

d) $\int_2^{14} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

- 2 Em que sentido a Regra de Simpson é melhor do que a Regra dos Trapézios?

- 3 Dada tabela

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$f(x)$	1,0	1,2408	1,5735	2,0333	2,6965	3,7183

e sabendo que a Regra 1/3 de Simpson é, em geral, mais precisa que a Regra dos Trapézios, qual seria o modo mais adequado de calcular $\int_0^1 f(x) dx$, usando a tabela acima? Aplique este processo para determinar o valor da integral.

- 4 Usando a Regra de Simpson determine o valor de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ com 8 subintervalos. Compare o resultado com o valor de $\ln(2)$.

- 5 Considere a integral $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$. Estime I pela Regra de Simpson usando $h = 0,25$.

- 6 Calcule π da relação $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ utilizando a Regra de Simpson com 6 subintervalos.

- 7 As fórmulas de Newton-Cotes são todas obtidas a partir da aproximação da função integranda por um polinômio interpolador de Newton-Gregory. Aplicando a mesma sistemática adotada para a obtenção das regras dos Trapézios e de Simpson, determine uma fórmula de integração utilizando o polinômio interpolador de Newton-Gregory de 4^o grau.

- 8 Aplique a fórmula obtida no exercício anterior para calcular $I = \int_1^2 \ln(x + \sqrt{x+1}) dx$.

- 9 Utilize a Regra 1/3 de Simpson para integrar a função abaixo entre 0 e 2 com o menor esforço computacional possível. Justifique.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ (x+2)^3, & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

10 Pela Regra de Simpson (n=8), calcule cada uma das integrais abaixo.

a) $\int_0^{\pi} e^{\sin(x)} dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin(x)} dx$

11 Sabendo-se que a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de um certo corpo de massa m de t_0 a t_1 é

$$Q = m \int_{t_0}^{t_1} C(\theta) d\theta$$

onde $C(\theta)$ é o calor específico do corpo à temperatura θ , calcule a quantidade de calor necessária para se elevar 20 kg de água de 0°C a 100°C . Para a água tem-se:

θ ($^{\circ}\text{C}$)	$C(\theta)$ (kcal/kg $^{\circ}\text{C}$)
0	999,9
10	999,7
20	998,2
30	995,3
40	992,3
50	988,1
60	983,2
70	977,8
80	971,8
90	965,3
100	958,4

12 De um velocímetro de um automóvel foram obtidas as seguintes leituras de velocidade instantânea:

t (min)	V (km/h)
0	23
5	25
10	28
15	35
20	40
25	45
30	47
35	52
40	60
45	61
50	60
55	54
60	50

Calcule a distância, em quilômetros, percorrida pelo automóvel.

13 Calcule o trabalho realizado por um gás sendo aquecido segundo a tabela:

V(m ³)	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
P(kg/m ²)	80	72	64	53	44	31	22

Sabe-se que $W = \int_{v_i}^{v_f} P dV$.

14 Uma linha reta foi traçada de modo a tangenciar as margens de um rio nos pontos A e B. Para medir a área do trecho entre o rio e a reta AB foram traçadas perpendiculares em relação a AB com um intervalo de 0,05m. Qual é esta área?

Perpendiculares	Comprimento (m)
1	3,28
2	4,02
3	4,64
4	5,26
5	4,98
6	3,62
7	3,82
8	4,68
9	5,26
10	3,82
11	3,24