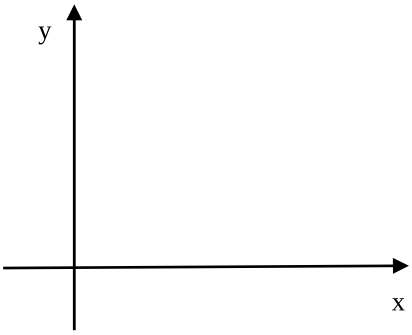
CÁLCULO DE ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

Um dos problemas que ocorrem mais frequentemente em trabalhos científicos é calcular as raízes de equações da forma: $f(x) = 0$. A função $f(x)$ pode ser um polinômio em x ou uma função transcendente. Em raros casos é possível obter as raízes exatas de $f(x)= 0$, como ocorre, por exemplo, supondo-se $f(x)$ um polinômio fatorável.

Resolver a equação $f(x) = 0$ consiste em determinar a solução (ou soluções) real ou complexa, $\bar{x}$, tal que $f(\bar{x}) = 0$. Por exemplo, na equação $f(x) = \cos x + x^2 + 5 = 0$, devemos determinar a solução $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = \cos \bar{x} + \bar{x}^2 + 5 = 0$.

Dado $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com f definida e contínua em [a, b], são denominadas raízes de f os valores de x tais que $f(x) = 0$.



Graficamente, as raízes reais são representadas pelas abscissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo $\overrightarrow{Ox}$.

Como obter as raízes de uma equação qualquer?

Métodos numéricos iterativos são utilizados para determinar aproximadamente a solução real $\bar{x}$. Nestes métodos, para determinar uma solução $\bar{x}$ quando esta é um valor real, necessitamos de uma solução inicial. A partir desta solução, geramos uma sequência de soluções aproximadas que, sob determinadas condições teóricas, convergem para a solução $\bar{x}$ desejada.

Portanto, para o problema de calcular uma raiz pode ser dividido em dois passos:

- **Passo 1**: Localização ou isolamento das raízes, que consiste em obter um intervalo [a,b] que contém a raiz.

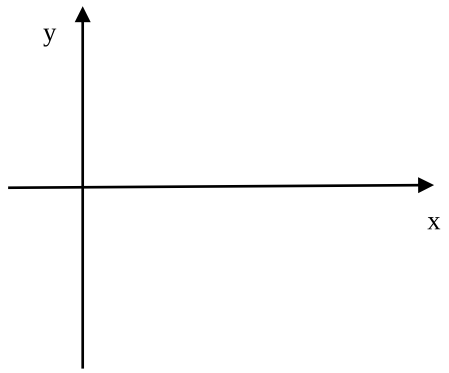
- **Passo 2:** Refinamento da raiz, que consiste em escolhida as aproximações iniciais no intervalo encontrado no Passo 1, melhorá-las sucessivamente até se obter uma aproximação para a raiz, dentre de uma precisão ε pré-fixada.

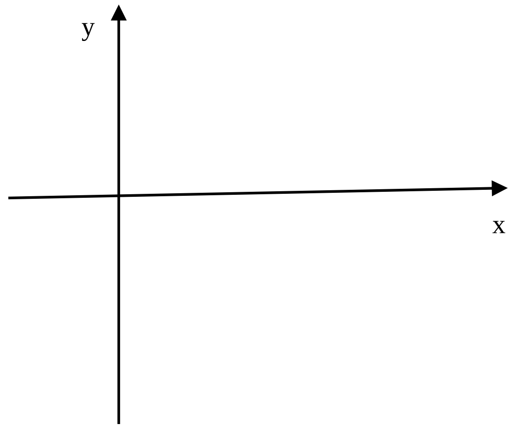
Passo 1: Isolamento das raízes

Nesse passo é necessário que consigamos determinar um intervalo finito [a,b], de tal forma que $\bar{x} \in [a, b]$. Para tal faz-se uma análise teórica e gráfica da função $f(x)$, em que utiliza-se o seguinte teorema:

Teorema:

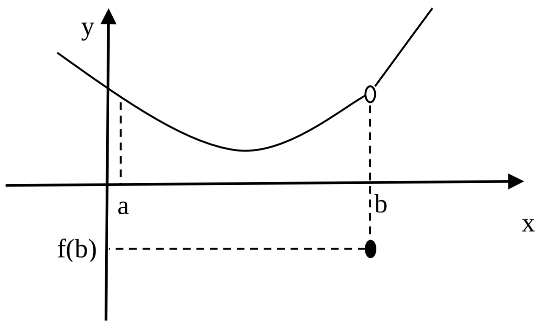
Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo [a, b]. Se $f(a)f(b) < 0$ (ou seja, $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais contrários), então existe pelo menos uma raiz real de f no intervalo [a,b].





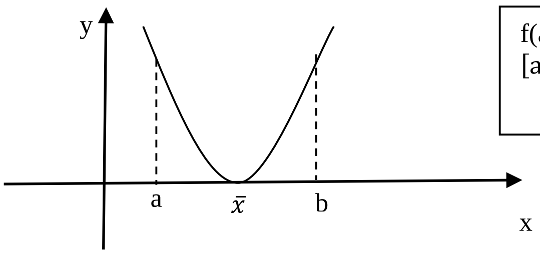
Observações:

1) Se a função não for contínua o teorema não é válido.



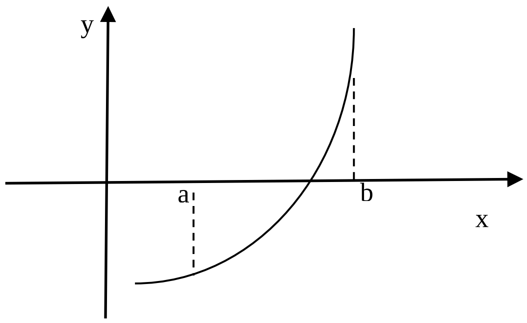
f(a) f(b) < 0, mas
$\nexists\ x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$

2) O teorema não é suficiente!!!! Não vale a volta: Se a raiz em [a,b] existe, então f(a) e f(b) tem sinais contrários.(Falso)

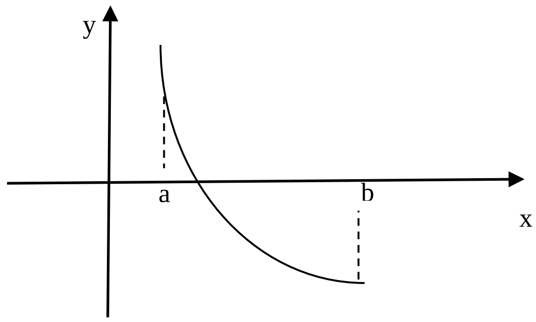


f(a) > 0 e f(b) > 0, mas $\exists\ x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$

3) Levando em consideração o teorema anterior e afirmando que f´(x) existe e não muda de sinal no intervalo, podemos afirmar que o zero é único (não existe ponto de inflexão).



$f'(x) > 0, \forall\ x \in [a, b]$



$f'(x) < 0, \forall\ x \in [a, b]$

"Se f é contínua e diferenciável em $[a,b]$, $f(a)f(b)<0$ e se f'(x) não troca de sinal em $[a,b]$, ou seja, $f'(x)>0$ ou $f'(x)<0$, então *f* possui uma única raiz em [a,b]".

A análise gráfica da função *f*(*x*) ou da equação *f*(*x*) = 0 é fundamental para obter boas aproximações para a raiz.

Uma forma prática de investigar intervalos $[a,b]$ que contém a raiz da função f consiste em expressar *f* em uma forma equivalente como segue:

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x).$$

Nesse caso, $f(x)=0$ se $f_1(x)-f_2(x)=0$, ou seja, $\bar{x}$ é a raiz da *f* se, e somente se, em $\bar{x}$, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ se interceptam. Portanto a partir da intersecção do gráfico $f_1(x)$ com $f_2(x)$ podemos determinar geometricamente um intervalo que contenha a raiz de *f*(*x*) (ou uma raiz aproximada).

Exemplos:

a) $f(x)=\sqrt{x}-5e^{-x}$

b) $f(x)=e^{x}+x$

c) $f(x)=\ln(x)-e^{x}$

d) $f(x)=sen(x)-\frac{1}{2}$

e) $f(x)=x\ln(x)-1$

Passo 2: Refinamento

O refinamento da solução pode ser feito utilizando vários métodos numéricos. A forma como se efetua o refinamento é o que diferencia os métodos. Todos eles pertencem à classe dos métodos iterativos.

Um método iterativo consiste em uma sequência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos (laços) até que um critério de parada seja satisfeito.

Critério de Parada

O critério de parada interrompe a sequência de aproximantes gerada pelos métodos iterativos. Este deve avaliar quando um aproximante está suficientemente próximo da raiz exata.

Assim, o processo iterativo é interrompido quando pelo menos um dos seguintes critérios é satisfeito:

I) $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{\max(1,|x_k|)}<\varepsilon$ II) $\dfrac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}<\varepsilon$ III) $|f(x_k)|<\varepsilon$

sendo x_k o valor aproximado da raiz na k-ésima iteração e, ε a precisão desejada.

Os métodos numéricos são, em geral, desenvolvidos de forma a satisfazer um dos critérios de parada.

MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE ZEROS DE FUNÇÃO

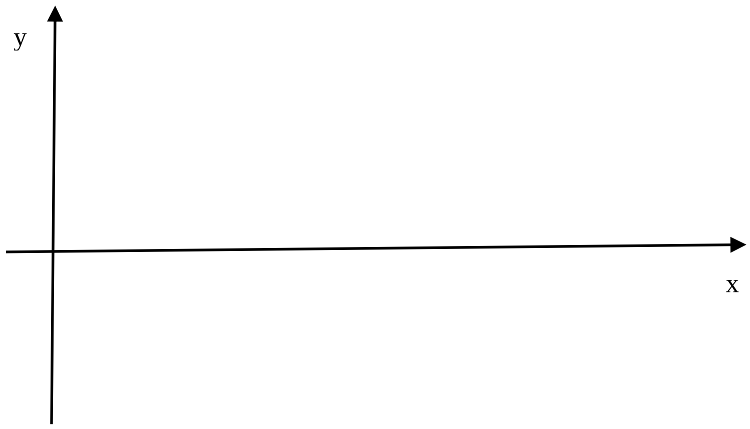
1 Método da Bissecção

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo [a,b] e tal que $f(a)f(b) < 0$.

O Método da Bissecção consiste em, a partir de um intervalo [a, b] que contenha a raiz $\bar{x}$, determinar uma sequência de intervalos $[a_i, b_i]$, i = 0, 1, ..., em que $a_0 = a$ e $b_0 = b$, de modo que a amplitude do intervalo numa iteração é a metade da amplitude do intervalo anterior e que ele sempre contem a raiz $\bar{x}$.

A sequência de intervalos será calculada até que a amplitude do intervalo seja menor que a precisão ε requerida, isto é, $(b_k - a_k) < \varepsilon$.

Graficamente tem-se:



As sequências a_i, b_i e x_i são construídas da seguinte maneira:

1. Determinar um intervalo inicial $[a_0, b_0]$ tal que $f(a_0)f(b_0) < 0$;
2. Calcular $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ (ponto médio do intervalo);
3. Se $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < \varepsilon$ ou $|f(x_k)| < \varepsilon$ PARE, x_k é uma raiz de $f(x)$;
4. Se $f(a_k)f(x_k) < 0$, então $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = x_k$;
5. Se $f(a_k)f(x_k) > 0$, então $a_{k+1} = x_k$ e $b_{k+1} = b_k$;

Terminado o processo, tem-se um intervalo [a, b] que contém a raiz e uma aproximação $\bar{x}$ para a raiz exata é obtida.

Convergência:

O Método da Bissecção converge sempre que a função $f(x)$ for contínua no intervalo [a,b] e $f(a)f(b) < 0$. Entretanto, a convergência do Método da Bissecção é muito lenta, pois se o intervalo inicial é tal que $(b_0 - a_0) >> \varepsilon$ e se ε for muito pequeno, o número de iterações tende a ser muito grande.

Estimativa do Número de Iterações:

Dada uma precisão ε e um intervalo inicial [a,b], é possível saber quantas iterações serão efetuadas pelo método até que obtenha $b - a < \varepsilon$, com $b > a$.
Estimativa para o número de iterações:

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Deve-se então obter *k* tal que $b_k - a_k < \varepsilon, \varepsilon \neq 0$.

Observações:

- O método converge sempre e pode ser aplicado para obter a raiz de qualquer equação;
- As iterações não envolvem cálculos trabalhosos;

Exemplo:

Utilizando o Método da Bissecção, determine a raiz da função $f(x) = \ln(x) - \mathrm{sen}(x)$, com $\varepsilon = 0.01$.

Exercícios:

1- Utilizando o Método da Bissecção, resolva a equação $x^3 - \text{sen}(x) = 0$, com $\varepsilon = 0.001$. Sol.: $\bar{x} \cong 0.9287$

2- Utilizando o Método da Bissecção, resolva a equação $x^2 + \ln(x) = 0$, com $\varepsilon = 0.01$. Sol.: $\bar{x} \cong 0.6425$

Algoritmo

1 Dados f(x) , a e b, tais que f(a)f(b) < 0 e ε uma precisão.
2 Faça $x = \frac{a+b}{2}$
3 Enquanto $|f(x)| > \varepsilon$, faça
início
    Se f(a)f(x) < 0, então
        b = x
    senão
        a = x
    $x = \frac{a+b}{2}$
fim
4 Escreva ($\bar{x} = \frac{a+b}{2}$)

2 Método da Posição Falsa (Método das Cordas ou das Secantes)

Seja f(x) uma função contínua no intervalo [a,b] e tal que f(a)f(b) < 0.

O Método da Posição Falsa utiliza a mesma idéia do Método da Bissecção, mas calcula a média aritmética ponderada entre a e b com pesos $|f(a)|$ e $|f(b)|$, respectivamente. Desta forma, temos:

$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|}$$

Como *f*(a) e *f*(b) tem sinais opostos, tem-se:

$$x = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Graficamente, o valor de *x* é o ponto de intersecção entre o eixo $\overrightarrow{Ox}$ e a reta *r(x)* que passa por *(a,f(a)) e (b,f(b)):*

As iterações são realizadas da seguinte forma:

Convergência:

Se $f(x)$ for contínua no intervalo [a, b] com f(a)f(b) < 0, então o Método da Posição Falsa converge.

Critério de parada:

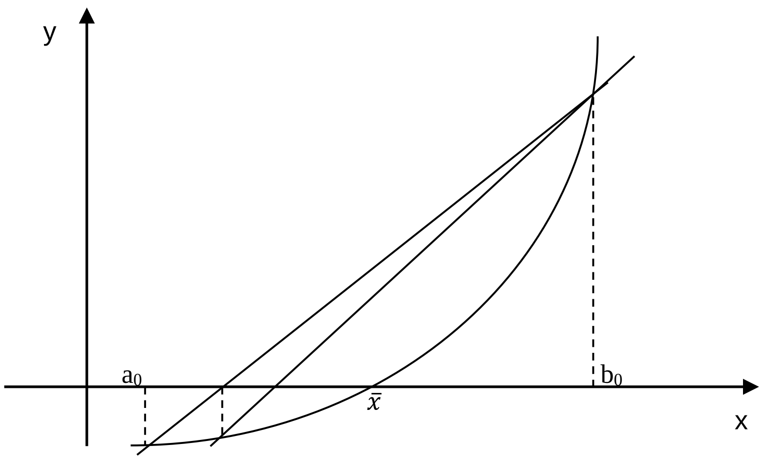
O método iterativo da posição falsa para quando:

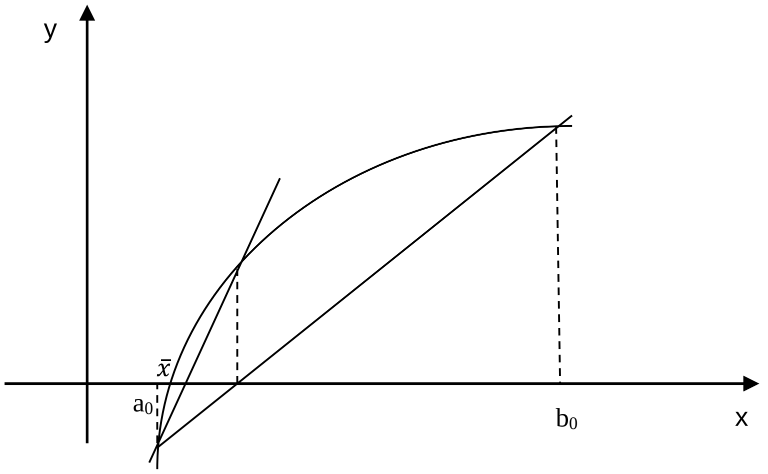
$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon,$$

sendo ε um valor pré-estabelecido para a precisão.

Observações:

- Se uma função é côncava ou convexa em [a, b], então no Método da Posição Falsa uma das extremidades permanece fixa.





- Geralmente, o Método da Posição Falsa obtém como raiz aproximada um ponto $\bar{x}$, no qual $|f(\bar{x})| < \varepsilon$, sem que o intervalo [a,b] seja "pequeno" o suficiente. Portanto, se for exigido que os dois critérios de parada (isto é, $|f(\bar{x})| < \varepsilon$ e $|b - a| < \varepsilon$) sejam satisfeitos simultaneamente, o método pode não convergir.

Exemplo:

Utilizando o Método da Posição Falsa, determine a primeira raiz positiva da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ com $\varepsilon = 5\ 10^{-4}$

Exercício:

Utilizando o Método da Posição Falsa, resolva a equação $x^3 - \text{sen}(x) = 0$, com $\varepsilon = 0.001$.
Sol.: $\bar{x} \cong 0.9287$

3 Método do Ponto Fixo (Método Iterativo Linear – Método das Aproximações Sucessivas)

Seja $f(x)$ uma função contínua em [a,b], intervalo que contém uma raiz da equação $f(x) = 0$.

O Método do Ponto Fixo (MPF) consiste em transformar a equação f(x) = 0 em uma equação equivalente $x = \varphi(x)$ e a partir de uma aproximação inicial x_0, gerar uma sequência $\{x_k\}$ de aproximações para $\bar{x}$ pela relação $x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0,1,2 ...$, ($f(\bar{x}) = 0$ se, e somente se, $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$). Assim, transformamos o problema de encontrar um zero de $f(x)$ no problema de encontrar um ponto fixo de $\varphi(x)$. Existem muitas maneiras de transformar f(x) em $x = \varphi(x)$.

Exemplo:

Para a equação $x^2 - x - 2 = 0$, tem-se várias funções de iteração:

a. $x = x^2 - 2$

b. $x = 1 + \frac{2}{x}$

c. $x = \sqrt{2+x}$

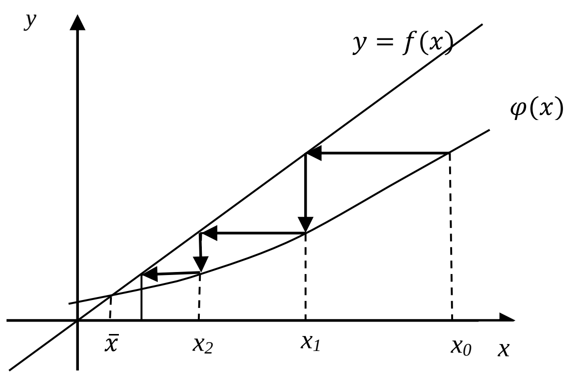
d. $x = \dfrac{2}{x-1}$

OBS: A forma geral das funções de iteração $\varphi(x)$ é $\varphi(x) = x + A(x)\,f(x)$, com a condição de que em $\bar{x}$, ponto fixo de $\varphi(x)$, se tenha $A(\bar{x}) \neq 0$. Desta forma, vamos verificar que:x $f(\bar{x}) = 0$ se, e somente, se $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$.

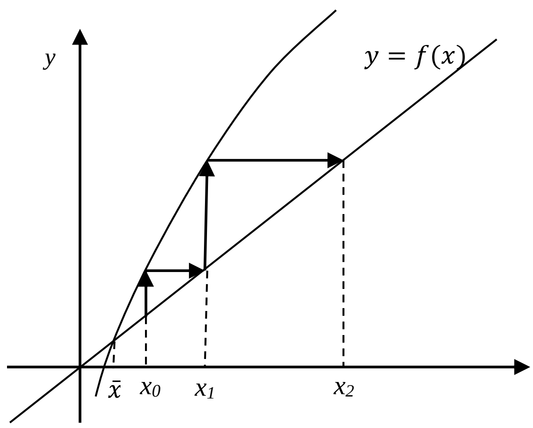
Seja $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$. Daí $\varphi(\bar{x}) = \bar{x} + A(\bar{x})f(\bar{x})$ e portanto $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$.
Se $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$, então $\bar{x} + A(\bar{x})f(\bar{x}) = \bar{x}$. Logo $A(\bar{x})f(\bar{x}) = 0$ e temos $f(\bar{x}) = 0$, pois $A(\bar{x}) \neq 0$.

Exemplo: $x = x - \frac{x^2-x-2}{m}$, $m \neq 0$, ($A(x) = \frac{1}{m}$).

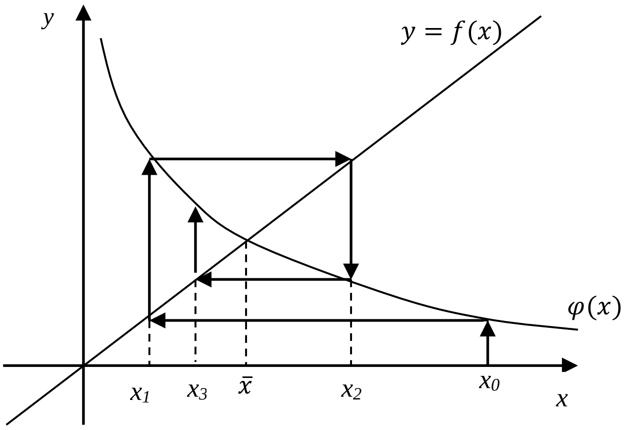
Graficamente, uma raiz da equação $x = \varphi(x)$ é a abcissa do ponto de intersecção da reta y = x e da curva $y = \varphi(x)$.



$k \to \infty$ e $\{x_k\} \to \bar{x}$



$k \to \infty$ e $\{x_k\}$ $não$ $tende$ a $\bar{x}$



$$k \rightarrow \infty \; e \; \{x_k\} \rightarrow \bar{x}$$

Portanto, para certas $\varphi(x)$, o processo pode gerar uma sequência que diverge de $\bar{x}$.

Convergência

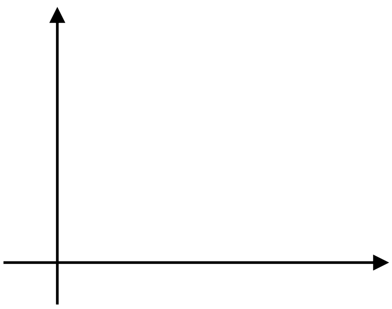
Dada uma função $f(x) = 0$, existe mais que uma função $\varphi(x)$ tal que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$, entretanto, não é para qualquer escolha de $\varphi(x)$ que o processo recursivo gera uma sequência convergente para $\bar{x}$.

Exemplo:

Seja $x^2 + x - 6 = 0$, cujas raízes são $\bar{x}_1 = -3$ e $\bar{x}_2 = 2$. Considere a raiz $\bar{x}_2 = 2$ e $\varphi_1(x) = 6 - x^2$. Tomando $x_0 = 1.5$ temos:

Podemos observar que $\{x_k\}$ não está convergindo para $\bar{x}_2 = 2$.

Porém, se $\bar{x}_2 = 2$ e $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$, começando com $x_0 = 1.5$, temos:



e podemos observar que $\{x_k\}$ está convergindo para $\bar{x}_2 = 2$.

Teorema: (Condições necessárias e suficientes para convergência do MPF)

Seja $\bar{x}$ uma raiz da equação $f(x) = 0$, isolada num intervalo I centrado em $\bar{x}$. Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração para a equação $f(x) = 0$. Se

i. $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I;
ii. $|\varphi'(x)| \leq \mathrm{M} < 1, \forall x \in \mathrm{I}$;
iii. $x_0 \in$ I;

então, a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0,1,2,\ldots$ converge para $\bar{x}$.

Exemplo:

Seja $x^2 + x - 6 = 0$, cujas raízes são $\bar{x}_1 = -3$ e $\bar{x}_2 = 2$. Analisar $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ e $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ com $x_0 = 1.5$.

Critério de parada:

O método iterativo do ponto fixo pára quando:

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon$$

sendo ε um valor pré-estabelecido para a precisão.

Exemplo:

Utilizando o MIL, determine a raiz da equação x^2 – sen (x) = 0, com ε = 0.004.

Exercício:

Utilizando o MIL, determine a raiz da equação $f(x)$=2x-ln(x) – 4 com ε = 10^{-3}.

Sol.: $\bar{x} \cong 2.4478835$

Algoritmo

1 Supondo as hipóteses do teorema válidas, x_0 uma solução inicial, $\varphi(x)$ a função de iteração e ε uma precisão pré-estabelecida

2 **Erro** = 1

3 Enquanto **Erro** > ε faça

início

$x_1 = \varphi(x_0)$

Erro = $\left|\frac{x_1 - x_0}{x_1}\right|$

$x_0 = x_1$

fim

4 Escreva (A solução é x_0)

4 Método de Newton (Método das Tangentes)

O Método de Newton tenta garantir a aceleração do Método do Ponto Fixo escolhendo uma função de iteração $\varphi(x)$, tal que $\varphi'(x) = 0$.

Desta forma, dada a equação $f(x) = 0$ e, partindo da forma geral $\varphi(x)$, queremos obter a função A(x) tal que $\varphi'(\bar{x}) = 0$.

Logo, dada a função de iteração $\varphi(x) = x + A(x)f(x)$ temos que:

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x)$$
$$x = \bar{x} \quad \rightarrow \quad \varphi'(\bar{x}) = 1 + A'(\bar{x})f(\bar{x}) + A(\bar{x})f'(\bar{x})$$

Como $f(\bar{x}) = 0$, temos;

$$\varphi'(\bar{x}) = 1 + A(\bar{x})f'(\bar{x})$$

Assim $\varphi'(\bar{x}) = 0$ se, e somente se, $1 + A(\bar{x})f'(\bar{x}) = 0$ e daí $A(\bar{x}) = -\frac{1}{f'(x)}$

Então, dada *f(x)*, a função de iteração $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ será tal que $\varphi'(\bar{x}) = 0$, pois como podemos verificar:

$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ e como $f(\bar{x}) = 0$, $\varphi'(\bar{x}) = 0$, desde que $f'(\bar{x}) \neq 0$.

Assim, escolhido x_0, a sequência $\{x_k\}$ será determinada por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \text{ k=0,1,2...}$$

O qual é denominado Método de Newton.

Uma outra maneira de deduzir o método de Newton é utilizar a ideia de aproximantes da seguinte maneira:

Seja $\bar{x}$ a raiz da equação f(x) = 0, tal que $\bar{x} \in [a, b]$, finito e que f´(x) e f´´(x) sejam funções contínuas que preservam o sinal em [a,b]. Seja x_k, tal que $x_k \cong \bar{x}$, $x_k \in [a, b]$ e h_k uma pequena tolerância positiva tal que:

$$\bar{x} = x_k + h_k \qquad \text{(I) .}$$

Aplicando-se a fórmula de Taylor em torno de $\bar{x}$ temos:

$$f(\bar{x}) = f(x_k + h_k) = f(x_k) + h_k f'(x_k) + \frac{(h_k)^2}{2!} f''(x_k) + \cdots + Erro$$

Truncando-se a série no termo de ordem 2 obtemos uma aproximação linear para $f(\bar{x})$:

$$f(\bar{x}) \cong f(x_k) + h_k f'(x_k)$$

Como $f(\bar{x}) = 0$, temos que $f(x_k) + h_k f'(x_k) \cong 0$ e daí $h_n \cong \frac{-f(x_k)}{f'(x_k)}$.

Ao usarmos (I) temos que:

$$\bar{x} - x_k \cong \frac{-f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Se substituirmos $\bar{x}$ por um novo valor x_{k+1} temos:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0,1,2, \ldots,$$

o qual é denominado Método de Newton.

Interpretação geométrica

Dado x_k, o valor de x_{k+1} pode ser obtido graficamente traçando-se pelo ponto $(x_k, f(x_k))$ a tangente à curva $y = f(x)$. O ponto de intersecção da tangente com o eixo dos x determina x_{k+1}.

Tomamos como uma primeira aproximação da raiz $x_0 = b$ e traçamos a reta tangente à curva no ponto $(x_0, f(x_0))$. Então temos:

$$tg\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad tg\, \alpha = f'(x_0)$$

Logo:

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

e portanto:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

E assim sucessivamente.

OBS: Devido a sua interpretação geométrica, o método de Newton também é conhecido como Método das Tangentes.

Convergência

Se $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ são contínuas num intervalo I que contém a raiz $x = \bar{x}$ de $f(x)$ e se $f'(\bar{x}) \neq 0$, então o Método de Newton converge, sendo sua convergência de ordem quadrática.

Critério de parada:

O método iterativo de Newton para quando:

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon,$$

sendo ε um valor pré-estabelecido para a precisão.

Exemplo:

Utilizando o método de Newton, determine a raiz positiva da função $f(x) = 4\cos(x) - e^x = 0$ com $\varepsilon = 10^{-2}$.

Exercício

1 - Utilizando o método de Newton, determine a raiz da equação $f(x) = x + 1 - \text{sen}(x)$ com $\varepsilon = 10^{-4}$.

2 - Determine a raiz positiva aproximada de $f(x) = x^2 - 7 = 0$ com $\varepsilon = 10^{-6}$.

Exercícios:

1 Determine geometricamente as raízes:

a) $f(x) = 1-x \ln x = 0$ ($x \in [1,2]$)
b) $f(x) = 2^x - 3x = 0$ ($x_1 \in [0,1]$ e $x_2 \in [3,4]$)
c) $f(x) = x^3$ 3 sen $x = 0$ ($x_1 \in [-2,-1]$ e $x_2 \in [1,2]$)
d) $f(x) = x^2 - 9 - \log x = 0$ ($x_1 \in [2,3]$ e $x_2 \in [0,1]$)
e) $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}e^x = 0$ (não existe raízes reais)
f) $f(x) = \sqrt{x} - 5e^x = 0$

2 Usando o Método da Bissecção, determine uma raiz das funções a seguir com a precisão $\varepsilon = 10^{-3}$

a) $f(x) = x^3 - senx$
b) $f(x) = 3x - \cos x + 1$
c) $f(x) = \ln x - senx$

3 Determine a raiz de $f(x) = \cos x + \ln x + x = 0$ com $\varepsilon = 10^{-2}$ e $\bar{x} \in [0.1, 0.5]$, utilizando os seguintes métodos numéricos:

a) Método da Bissecção;
b) Método da Posição Falsa;
c) Método do Ponto Fixo.

4 Aplique o Método do Ponto Fixo para calcular a raiz de $x^2 - 5 = 0$ com $\varepsilon = 10^{-2}$.

a) partindo do intervalo inicial [2,2.5];
b) partindo do intervalo inicial [2,3].

5 Calcule pelo menos uma raiz real das equações abaixo, com $\varepsilon = 10^{-3}$, usando o Método de Newton.

a) $x^3 - \cos x = 0$
b) $x^2 + e^{3x} - 3 = 0$
c) $e^x + \cos x = 5$
d) $3x^4 - x = 3$
e) $\frac{x}{2} - \tan x = 0$
f) $2\cos x = \frac{e^x}{2}$
g) $x^5 - 6 = 0$

6 Determine todas as raízes de $f(x) = 0.2x^3 - 3.006x^2 + 15.06x - 25.15 = 0$ com $\varepsilon = 10^{-4}$, utilizando o Método de Newton.

7 O polinômio $p(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$ tem seus cinco zeros reais, todos no intervalo (-1;1).Determine-os, pelo respectivo método, usando $\varepsilon = 10^{-6}$.

a) $\bar{x}_1$: Método de Newton (x_0=-0.8)
b) $\bar{x}_2$: Método da Bissecção ([a,b]=[-0.75,-0.25])
c) $\bar{x}_3$: Método da Posição Falsa ([a,b]=[-0.25,0.25])
d) $\bar{x}_4$: Método do Ponto Fixo ([a,b]=[0.2,0.6])
e) $\bar{x}_5$: Método de Newton (x_0=0.8)

8 Seja a equação $f(x) = xe^{-x} - e^{-3}$.

a) Verifique gráfica e analiticamente que $f(x)$ possui um zero no intervalo [0,1];

b) Determine a raiz de $f(x)$ em [0,1], usando o Método de Newton com $x_0=0.9$ e precisão $\varepsilon = 5\ 10^{-6}$.

9 Seja a equação $f(x) = e^x - 4x^2$ e ξ sua raiz no intervalo (0,1). Determine ξ com $\varepsilon = 10^{-5}$ utilizando o Método de Newton ($x_0=0.5$).

10 Aplique o Método de Newton à equação $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$ com $x_0=1.9$. Justifique o que acontece.

11 O valor de π pode ser obtido através da resolução das seguintes equações:

a) $\operatorname{sen} x = 0$

b) $\cos x + 1 = 0$

Aplique o método de Newton com $x_0=3$ e precisão $\varepsilon = 10^{-7}$ em cada caso e, compare os resultados obtidos. Justifique.

12 Aplique o Método das Aproximações Sucessivas com $\varepsilon = 10^{4}$ e seis casas decimais:

a) $f(x) = x^2 - 9 - \log x = 0$ ($x_1= 3.0805$; $x_2 = 0.0045$)
b) $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ ($x = 1.3252$)
c) $f(x) = (0,5)^x + 3x = 0$ ($x_1= -3.3134$; $x_2= -0.4578$)
d) $f(x) = x\,2^x - 6 = 0$ ($x = 1.7652$)
e) $f(x) = x - \cos x = 0$ ($x= 0.739$)

13 Aplique o Método de Newton para determinar as raízes das equações dado $\varepsilon = 10^{4}$ e seis casas decimais:

a) $f(x) = 7 \log x - x = 0$ ($x_1=1.893$ e $x_2=4.7133$)
b) $f(x) = (2-x)\, e^x - 2 = 0$ ($x = 1.5942$)
c) $f(x) = \operatorname{sen} x + 2x - 5 = 0$ ($x = 2.0582$)
d) $f(x) = e^x (x-1) - 1 = 0$ ($x = 1.2785$)
e) $f(x) = x^3 - x^2 - 3 = 0$ ($x = 1.86371$)

14 Seja $f(x) = e^x - 4x^2$ e sua raiz $x^* \in [0,10]$. Tomando $x_0=0.5$, encontre $\bar{x}$ com $\varepsilon = 10^{4}$ e seis casas decimais, usando:

a) Método das Aproximações sucessivas com $F(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$;
b) Método de Newton;
c) Método das Cordas.

Compare a convergência.