SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função desconhecida e algumas de suas derivadas. Se a função é de uma só variável, então a equação diferencial se chama *equação diferencial ordinária (EDO).*

Uma equação diferencial ordinária que envolve derivadas até a ordem *n* é chamada de *equação diferencial ordinária* (*EDO*) de ordem *n* e pode ser escrita na forma:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)), \qquad a \le x \le b \qquad (1)$$

Obviamente, uma EDO de ordem 1, de interesse neste tópico para o desenvolvimento de métodos numéricos à sua resolução é definida por:

$$y'(x) = f(x, y), \qquad a \le x \le b \qquad (2)$$

As EDO’s ocorrem com muita frequência na descrição de fenômenos da natureza e em problemas de engenharia.

As equações que estabelecem relações entre uma variável que depende de duas ou mais variáveis independentes e as derivadas (parciais) são denominadas de *equações diferenciais parciais*.

Exemplos:

- Equação diferencial de 1ª ordem e lineares
$$xy' = x - y$$

- Equação diferencial de 2ª ordem e lineares
$$y'' = y$$

- Equação diferencial de 2ª ordem e não-lineares
$$y'' + (1 - y^2)y' + y = 0$$

- Equação diferencial parcial
$$\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} = 0, \; com \; u \equiv u(x, y)$$

A solução de (1) é qualquer função y = F(x) que é definida em [a,b] e tem n derivadas neste intervalo e que satisfaz (1), ou seja, é uma função da variável independente que satisfaz a equação. Uma equação diferencial possui uma família de soluções.

Exemplo:

1) $y' = y,\ tem\ por\ solução\ a\ família\ de\ funções: y = ae^x,\ a \in R$

2) $y''' = 0,\ tem\ por\ solução\ a\ família\ de\ funções: y = p_2(x)$

Como uma equação diferencial não possui solução única, então para individualizar uma solução tem-se que impor condições suplementares. Em geral uma equação de ordem *n* requer *n* condições adicionais a fim de ter uma única solução.

Então, dada uma equação de ordem n, se a função, assim como suas derivadas até ordem *n-1* são especificadas em um mesmo ponto, tem-se um *Problema de Valor Inicial (PVI).*

Exemplos:

1) $\begin{cases} y'' = 3y' - 2y \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$, PVI de ordem 2;

2) $\begin{cases} y' = y + 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$, PVI de ordem 1.

OBS: Dada uma equção diferencial de ordem *n*, $n \geq 2$, se as condições fornecidas para a busca da solução única não são dadas num mesmo ponto temos um *problema de valor de contorno (PVC).*

Problema de Valor Inicial (P.V.I.)

Como nem sempre é possível obter a solução numérica de uma EDO, pode-se usar métodos numéricos para resolvê-la. Trataremos aqui de métodos numéricos para se conseguir os valores de y(x) em pontos distintos daqueles das condições iniciais associadas ao PVI.

Um problema de valor inicial (P.V.I.) de 1ª ordem tem a forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

em que $a \leq x \leq b$, y $\in$ R.

A solução deste problema é uma função $y = y(x)$ contínua e derivável que satisfaz a equação e passa pelo ponto (x_0,y_0).

Esse problema será resolvido numericamente. O primeiro passo é discretizar o intervalo [a,b], isto é, subdividir o intervalo [a,b] em n subintervalos, definido pelos ponto igualmente espaçados:

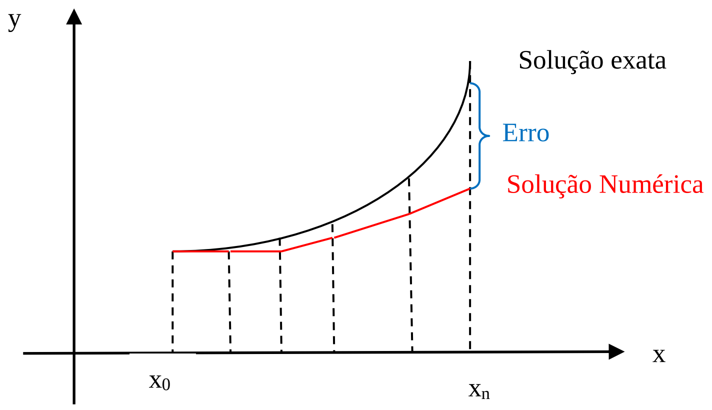
$$x_j = x_0 + jh$$

sendo,

$$h = \frac{b-a}{n},\ j = 0,\dots,n \text{ e } x_0 = a \text{ e } x_n = b.$$

O conjunto $I = \{ x_0 ,...,x_n \}$ obtido desta forma denomina-se de rede ou malha de [a,b].

A solução numérica $y_n(x)$ é a função linear por partes cujo gráfico é uma poligonal com vértices nos pontos (x_j,y_j), em que y_j deve ser calculado utilizando algum método numérico que será abordado a seguir.



Métodos de Passo Simples

Definição: Um método para resolver um P.V.I. é denominado de *passo simples* se cada aproximação y_{k+1} é calculado somente a partir da aproximação anterior y_k. Pode-se formalizá-lo como:

$$y_{k+1} = y_k + h.\Phi(x_k,y_k,h)$$

1) Método de Euler

Seja o PVI de ordem 1:

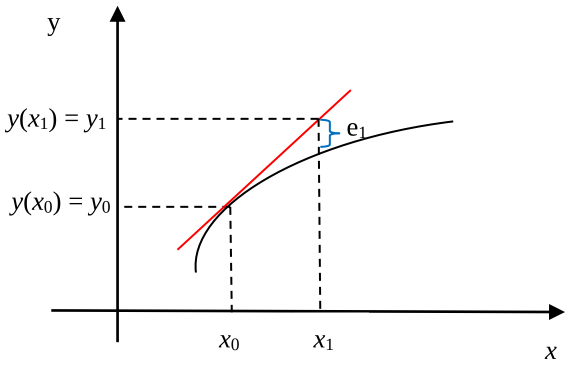
$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_o \end{cases} \qquad (3)$$

Deseja-se determinar aproximações $y_1,... , y_n$ para as soluções exatas $y(x_1),... , y(x_n)$.

Procurando y_1:

Como não se conhece $y(x_1)$ toma-se y_1 como uma aproximação para $y(x_1)$. Traça-se a tangente T à curva y(x) no ponto $(x_0,y(x_0))$ cuja equação é dada por:

$$y(x) - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0).$$



Fazendo-se $x = x_1$ e lembrando que $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0))$, $y(x_1) = y_1$ e $(x_1 - x_0) = h$, tem-se:

$$y_1 = y_0 + h\ f(x_0, y_0)\ .$$

O erro cometido na aproximação de $y(x_1)$ por y_1 é

$$e_1 = y_1 - y(x_1)$$

ou seja a diferença entre a solução numérica e a solução exata.

Procurando y_2:

Faz-se a mesma coisa a partir de x_1 e obtem-se a fórmula:

$$y_2 = y_1 + h\ f(x_1, y_1)$$

Cujo erro é dado por:

$$e_2 = y_2 - y(x_2)\ .$$

E assim sucessivamente obtem-se:

$$y_{j+1} = y_j + h\ f(x_j, y_j),\ j = 0,1,\ldots,n-1$$

Cujo erro é dado por:

$$e_{j+1} = y_{j+1} - y(x_{j+1}),\ j = 0,1,\ldots,n-1$$

Usando Série de Taylor:

Modo 1

Supõe uma expansão da solução $y(x)$ em série de Taylor em torno do ponto x_j:

$$y(x) = y(x_j) + h\ y'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_j) + \ldots + \frac{h^q}{q!} y^{(q)}(x_q) + E_{q+1}(x)$$

Truncando-se a série no termo de primeiro grau e desprezando o erro tem-se:

$$y(x) \cong y(x_j) + h\, y'(x_j)$$

Fazendo-se $x=x_{j+1}$ tem-se:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + h\, y'(x_j).$$

Logo:

$$y_{j+1} = y_j + h\; f(x_j, y_j), j = 0,1,\ldots,n-1$$

OBS: O método de Euler é um método de Série de Taylor de ordem 1.

Modo 2:

Conhece-se do cálculo o desenvolvimento em Série de Taylor da função y(x), que supõe-se suficientemente diferenciável:

$$y(x) = y(x_j) + h\; y'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_j) + \ldots + \frac{h^q}{q!} y^{(q)}(x_q) + E_{q+1}(x)$$

Como $y' = f(x,y)$ tem-se:

$$y(x) = y(x_j) + h\, \Delta(x,y,h)$$

em que

$$\Delta(x,y,h) = f(x_j, y_j) + \frac{h}{2}.f'(x_j, y_j) + \ldots + \frac{h^{q-1}}{q!}.f^{(q-1)}(x_j, y_j) + E_{q+1}$$

é o acréscimo exato de $y(x)$ quando x é aumentado de h. Chama-se de $\Delta(x,y,h)$ de função incremento.

Faz-se uma aproximação para $\Delta(x, y, h)$:

$$\Delta(x,y,h) = f(x_j, y_j) + \frac{h}{2}.f'(x_j, y_j) + \ldots + \frac{h^{q-1}}{q!}.f^{(q-1)}(x_j, y_j) \qquad (4)$$

Toma-se q = 1, e tem-se:

$$\Delta(x,y,h) = f(x_j, y_j)$$

Estabelece-se então o Método de Euler

$$y_{j+1} = y_j + h\; f(x_j, y_j),\; j = 0,1,\ldots,n-1$$

Logo, o valor da função no passo $j + 1$ é dado em função do valor da função no ponto j e do valor de f no ponto (x_j, y_j).

OBS: O método de Euler é um método de Série de Taylor de ordem 1.

Exemplo: Usando o Método de Euler, encontre uma solução aproximada para o P.V.I.:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases};$$

no intervalo [0,1], sobre 5 subintervalos igualmente espaçados.

Tabela de soluções obtidas pelo método de Euler:

x	y	y'
0	1,0	1,0
0,1	1,1	1,2
0,2	1,22	1,42
0,3	1,362	1,662
0,4	1,5282	1,9282
0,5	1,721	2,221
0,6	1,9431	2,5431
0,7	2,1974	2,8974
0,8	2,4871	3,2871
0,9	2,8158	3,7158
1,0	3,1874	4,1874

Mudando a variação no incremento de x para h = 0.5, a partir de x_0 = 1, nos leva à:

x	1,5	2,0	2,5
y	5,8543	10,4548	18,1689

A solução exata da E.D.O. é $y(x) = 2e^x - x + 1$, e pode-se determinar os valores discretos de x, confrontando as soluções:

x	**0**	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**
y (Euler)	1,0	1,7210	3,1874	5,8543	10,4548	18,1689
y (Exata)	1,0	1,7974	3,4366	6,4634	11,7781	28,8650

Observação: Notamos que os valores encontrados através do método de Euler estão muito distantes dos verdadeiros valores. Isto ocorre, pois, o erro cometido no 1º intervalo é carregado para o 2º intervalo. No 3º intervalo, carregamos o erro do 1º e o 2º intervalos e assim por diante.

Solução para este problema: Utilizar mais termos da expansão em série de Taylor acarretaria numa melhor aproximação de $y(x)$. A aproximação de ordem 1 feita na expansão de Taylor para definir o método de Euler também pode ser estendida para ordens maiores. Esta estratégia será usada nos métodos definidos a seguir.

<u>Teorema 1:</u> Limitante para o erro cometido no método de Euler

Seja y_n a solução aproximada do PVI (3) obtida pelo Método de Euler. Se a solução exata $y(x)$ de (3) possui uma derivada de segunda ordem no intervalo $[x_0, b]$, e se nesse intervalo as desigualdades

$$|\, f_y(x,y)| < L \ \text{ e } \ |\, y''(x)| < Y$$

forem satisfeitas para constantes positivas L e Y limitadas, o erro $r_n = y_n - y(x_n)$ do método de Euler, num ponto $x_n = x_0 + nh$ é limitado como segue:

$$|\, r_n| \leq \frac{hY}{2L}[e^{(x_n - x_0)L} - 1].$$

Observação: Este teorema mostra que o erro tende a zero quando $h \to 0$.

<u>Exemplo:</u>

Determinar um limite superior para o erro de truncamento, decorrente da aplicação do método de Euler à solução da equação:

$$y' = y,\ y(0) = 1,\ 0 \leq x \leq 1.$$

<u>Solução:</u>

Neste caso, $f(x, y) = y$; $\dfrac{df}{dy} = 1$ e $L = 1$.

Uma vez que $y(x) = e^x$, temos $y''(x) = e^x$ e $|\, y''(x)| \leq e$ para $0 \leq x \leq 1$. Para determinar um limite para o erro em $x = 1$, temos $x_n - x_0 = 1$ e $Y = e$, assim

$$|\, r(1)| \leq \frac{he}{2(1)}(e^{(1-0)1} - 1) = \frac{he}{2}(e - 1) < 2{,}4h \qquad \therefore\ |\, r(1)| < 2{,}4h.$$

Exercícios:

1. Seja o P.V.I. $\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}$. Usando h = 0,1 e n = 5, aplique o método de Euler para construir uma solução aproximada. Avalie o erro cometido.

2. Usando o Método de Euler, encontre uma solução aproximada para o P.V.I.

$$\begin{cases} y' = x.y^{1/3} \\ y(1) = 1, \qquad x \in [1,2] \text{ e } h = 0{,}2 \end{cases}$$

2) Métodos de Runge-Kutta

O algoritmo de Taylor de ordem elevada apresenta a grande dificuldade de exigir o cálculo, muitas vezes tedioso de f', f'', ..., $f^{(q-1)}$, o que o torna às vezes até impraticável, mesmo no caso de uma única equação diferencial. Por esta razão estes algoritmos não tem tido boa aceitação.

É possível simular o cálculo desta expansão de Taylor através de cálculos que envolvam somente a própria f. Este método foi introduzido por Runge e Kutta e leva este nome.

O método de Runge-Kutta de *s* estágios é definido por:

$$\begin{cases} k_1 = f(x, y) \\ k_2 = f(x+c_2.h,\ y+h.a_{21}.k_1) \\ \dots \\ k_s = f(x+c_s.h,\ y+h.(a_{s1}.k_1 + a_{s2}.k_2 + \dots + a_{s,s-1}.k_{s-1})) \end{cases} \qquad (5)$$

com $c_i = \sum_{j<i} a_{ij}$.

Define-se $\Phi_{RK}(x,y,h)$ por:

$$\Phi_{RK}(x_k,y_k,h) = b_1.k_1 + b_2.k_2 + \dots + b_s.k_s$$
$$\therefore y_{n+1} = y_n + h.\Phi_{RK} \qquad (6)$$

Deve-se determinar os coeficientes c_i, a_{ij}, b_i.

<u>Definição</u>: O método definido por (5) tem ordem *q* se *q* é o maior inteiro para o qual se tem:

$$\Phi(x,y,h) = y(x+h) - y(x) = h.\Phi_{RK}(x,y,h) + o(h^q) \qquad (7)$$

Pelo algoritmo de Taylor, tem-se

$$\Phi(x,y,h) = y(x+h) - y(x) = h.\Phi_T(x,y,h) + o(h^q) \qquad (8)$$

$$\Phi_T(x,y,h) = \Phi_T = f(x,y) + \frac{h}{2}.f'(x,y) + \dots + \frac{h^{q-1}}{q!}.f^{(q-1)}(x,y) \qquad (9)$$

Para f suficientemente diferenciável, (7) terá ordem q se as séries de Taylor para $y(x_n+h)$ e y_{n+1} coincidirem até o termo de h^q, inclusive, isto é,

$$\Phi_T(x,y,h) - \Phi_{RK}(x,y,h) = o(h^q) \qquad (10)$$

2.1) Métodos de Runge-Kutta de ordem 2

Considere **s = 2**, isto é, 2 estágios em (5).

Tem-se:

$$\begin{cases} k_1 = f\ (x,\ y) \\ k_2 = f\ (x + c_2.h,\ y + h.a_{21}.k_1) \end{cases}$$

Então

$$y_{n+1} = y_n + h.(b_1.k_1 + b_2.k_2) \tag{11}$$

Para obter-se os coeficientes, igualam-se as expressões de Φ_{RK} e Φ_T.

Desenvolvendo $k_2 = f(x+hc_2,\ y\ +ha_{21}k_1)$ por Série de Taylor para funções de duas variáveis, tem-se:

$$\begin{aligned} k_2 &= f\ + c_2.h.f_x + h.a_{21}.k_1.f_y + o(h^2) \\ &= f + c_2.h.f_x + h.a_{21}.f.f_y + o(h^2) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\Phi_T = f + \frac{h}{2}.(f_x + f.f_y) + o(h^2)$$

Deve-se ter $\Phi_T - \Phi_{RK} = o(h^2)$, então,

$$f + \frac{h}{2}.(f_x + f.f_y) - b_1.k_1 - b_2.(f + c_2.h.f_x + h.a_{21}.f.f_y) = o(h^2)$$

$$f + \frac{h}{2}.(f_x + f.f_y) - b_1.f - b_2.(f + c_2.h.f_x + h.a_{21}.f.f_y) = o(h^2)$$

$$f(1 - b_1 - b_2) + f_x.(\frac{h}{2} - b_2.c_2.h) + f.f_y.(\frac{h}{2} - b_2.h.a_{21}) = o(h^2)$$

Considerando-se que $o(h^2)$ tende a zero quando h tende a zero, então temos:

$$\begin{cases} 1 - b_1 - b_2 = 0 \\ h.(\frac{1}{2} - b_2.c_2) = 0 \\ h.(\frac{1}{2} - b_2.a_{21}) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 - b_1 - b_2 = 0 \\ \frac{1}{2} - b_2.c_2 = 0 \\ \frac{1}{2} - b_2.a_{21} = 0 \end{cases}$$

De onde vem que:

$$b_1 = 1 - b_2$$

$$c_2 = a_{21} = \frac{1}{2.b_2}$$

As escolhas mais comuns são:

a) $b_2 = 1$

$$b_1 = 0$$

$$c_2 = a_{21} = \frac{1}{2}$$

a expressão (11) fornece:

$$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}.f(x_n, y_n))$$

conhecido por **<u>Método de Euler Modificado</u>**.

<u>Exemplo:</u>

Utilizando o método de Euler Melhorado, calcule o valor do P.V.I. $\begin{cases} y' = x^2 + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ usando h = 0,2 e $x \in [0;0,6]$.

b) Quando consideramos: $b_2 = \frac{1}{2}$

$$b_1 = \frac{1}{2}$$
$$c_2 = a_{21} = 1$$

a expressão (11) fornece:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}.\left(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h.f(x_n, y_n)) \right)$$

conhecido por **Método de Euler Melhorado ou Aperfeiçoado**.

2.2) Métodos de Runge-Kutta de ordem 3

Considere **s = 3**, isto é, 3 estágios em (6).

Tem-se que:

$$\begin{cases} k_1 = f\ (x,\ y) \\ k_2 = f\ (x + c_2.h,\ y + h.a_{21}.k_1) \\ k_3 = f\ (x + c_3.h,\ y + h.(a_{31}.k_1 + a_{32}.k_2)) \end{cases}$$

Então

$$y_{n+1} = y_n + h.(b_1.k_1 + b_2.k_2 + b_3.k_3) \qquad (12)$$

Para obter-se os coeficientes, igualam-se as expressões de Φ_{RK} e Φ_T considerando-se aproximação de ordem 3 nas expressões.

Considerando-se (7) com (8) e desenvolvendo-se k_2 e k_3 por Série de Taylor para funções de duas ou mais variáveis, tem-se:

Comparando-se (7) com (8) e considerando que $o(h^3)$ tende a zero quando h tende a zero, isto é, a nulidade das expressões que acompanham as potências de h até ordem 3, obtemos as *condições de ordem*, dadas a seguir:

$$\begin{array}{ll} b_1 + b_2 + b_3 = 1 & a_2 b_2 + a_3 b_3 = \frac{1}{2} \\ a_2^2 b_2 + a_3^2 b_3 = \frac{1}{3} & b_{21} b_{32} b_3 = \frac{1}{6} \end{array} \qquad (13)$$

Considerando em (13) a_2 e a_3 como parâmetros livres, determinamos de maneira única os demais parâmetros, obtendo a família de métodos de Runge-Kutta de 3 estágios com ordem 3.

Temos portanto 4 equações a 6 incógnitas; atribuindo valores a 2 variáveis determinamos as outras 4. Novamente temos infinitos métodos de Runge-Kutta de 3 estágios de ordem 3.

Também nesse caso, não conseguimos um método de 3 estágios e de ordem 4 a menos que se imponha condições sobre f(x,y).

Fazendo-se $b_1 = \frac{1}{4};\ b_2 = 0$

$\therefore b_3 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4};\quad \frac{3}{4}a_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_3 = \frac{2}{3}$

$a_2^2.0 = \frac{1}{3} - (\frac{2}{3})^2.\frac{3}{4} = 0;\quad \therefore \forall a_2$ satisfaz a igualdade.

Impondo que $a_2 = \frac{1}{3}$ temos

$\frac{1}{4}b_{32} = \frac{1}{6} \Rightarrow b_{32} = \frac{2}{3}.$

Temos:

$$y_{n+1} - y_n = h\varphi(x_n, y_n, h) = h[b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3]$$

$$= h[b_1 f(x_n, y_n) + b_3 f(x_n + a_3h, y_n + h[\underbrace{(a_3 - b_{32})}_{=0}k_1 + b_{32}k_2])$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{4}[f(x_n, y_n) + 3f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}f(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{1}{3}f(x_n, y_n)])$$

Outros métodos de RK de ordem 3 podem ser definidos a partir das equações (13), como é o caso do **Método Nyströn** de ordem 3, desenvolvido quando consideram-se $b_2 = b_3$ e $a_2 = a_3$ em (13):

$$y_{n+1} = y_n + h[\frac{1}{4}f + \frac{3}{8}f(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}f(x_n, y_n)) + \frac{3}{8}f(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}f(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}f(x_n, y_n))].$$

2.3) Método de Runge-Kutta de ordem 4

Considere **s = 4**, isto é, o desenvolvimento do método RK para 4 estágios. De (6) tem-se que:

Tem-se que:

$$\begin{cases} k_1 = f(x, y) \\ k_2 = f(x + c_2.h,\ y + h.a_{21}.k_1) \\ k_3 = f(x + c_3.h,\ y + h.(a_{31}.k_1 + a_{32}.k_2) \\ k_4 = f(x + c_4.h,\ y + h.(a_{41}.k_1 + a_{42}.k_2 + a_{43}.k_3) \end{cases}$$

Então

$$y_{n+1} = y_n + h.(b_1.k_1 + b_2.k_2 + b_3.k_3 + b_4.k_4) \qquad (14)$$

Para obter-se os coeficientes, igualam-se as expressões de Φ_{RK} e Φ_T considerando-se aproximação de ordem 4 nas expressões.

Para obter-se todos os coeficientes para o método RK, consideram-se as equações (7) e (8) desenvolvidas até a ordem 4. Desenvolvendo-se k_2, k_3, k_4 por Série de Taylor para funções de duas ou mais variáveis e igualando-se as expressões de Φ_{RK} e Φ_T. Considerando-se de (6) que:

$$\begin{aligned} a_{21} &= c_2 \\ a_{31} &= c_3 - a_{32} \\ a_{41} &= c_4 - a_{42} - a_{43} \end{aligned}$$

tem-se o seguinte sistema a ser resolvido para a determinação dos coeficientes do método:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1 \\ c_2.b_2 + c_3.b_3 + c_4.b_4 = \dfrac{1}{2} \\ c_2^2.b_2 + c_3^2.b_3 + c_4^2.b_4 = \dfrac{1}{3} \\ c_2^3.b_2 + c_3^3.b_3 + c_4^3.b_4 = \dfrac{1}{4} \\ c_2.a_{32}.b_3 + c_2.a_{42} + c_3.a_{43} = \dfrac{1}{6} \\ c_2.c_3.a_{32}.b_3 + b_4.(c_2.a_{42} + c_3.a_{43}) = \dfrac{1}{8} \\ c_2^2.a_{32}.b_3 + b_4.(c_2^2.a_{42} + c_3^2.a_{43}) = \dfrac{1}{2} \\ c_2.a_{42}.a_{43}.b_4 = \dfrac{1}{24} \end{cases} \tag{15}$$

resultante da equação $\Phi_T - \Phi_{RK} = o(h^4)$.

Resolvendo-se o sistema (15) obtemos os seguintes valores para os coeficientes de (14):

$b_1 = 1/6$; $b_2 = 1/3$; $b_3 = 1/3$ e $b_4 = 1/6$;

$c_2 = a_{21} = 1/2$; $c_3 = 1/2$; $a_{31} = 0$; $a_{32} = 1/2$; $c_4 = 1$; $a_{41} = 0$; $a_{42} = 0$ e $a_{43} = 1$.

O Método de Runge-Kutta de ordem 4 clássico é então definido por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}.\left(k_1 + 2.k_2 + 2.k_3 + k_4\right);$$

em que k_1, k_2, k_3, k_4 são dados por:

$$\begin{cases} k_1 = f\,(x_n,\, y_n) \\ k_2 = f\,(x_n + \dfrac{h}{2},\, y_n + \dfrac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f\,(x_n + \dfrac{h}{2},\, y_n + \dfrac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f\,(x_n + h,\, y_n + hk_3) \end{cases}$$

Exercícios

1 Calcule y(0. 4) usando o Método de Euler com h=0.01 para o PVI: $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

2 Calcule y(1) para $y'=4x^3$; y(0)=0 aplicando o Método de Euler com h=0.2.

3 Seja o PVI: $\begin{cases} xy' = x - y \\ y(2) = 2 \end{cases}$.

Estime y(2.1) pelo Método de Euler com h=0.1, h=0.01 e h=0.025.

4 Dado o PVI: $\begin{cases} y' = 0.04y \\ y(0) = 1000 \end{cases}$, estime o valor de y(1), com h=0.5, h=0.25 e h=0.1 usando

a) o Método de Euler.

b) o Método de Euler Melhorado (Runge-Kutta de 2ª ordem).

c) o Método de Runge-Kutta de ordem 4.

5 Dado o PVI: $\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{x+1} + (x+1)^3 \\ y(0) = 3 \end{cases}$, obtenha y(1) e y(2) aplicando o Método de Heun com h=0.125 e h=0.2.

6 Dado o PVI abaixo, considere h=0.5, h=0.25, h=0.125 e h=0.1.

$$\begin{cases} y' = 4 - 2x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

a) Encontre uma aproximação para y(5) usando o Método de Euler Melhorado, para cada h.

b) Compare seus resultados com a solução exata, dada por $y(x)=-x^2+4x+2$. Justifique.

c) Você espera o mesmo resultado do item (b) usando o Método de Euler? Justifique.

7 Dado o PVI: $\begin{cases} y' = \cos(x) + 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$, estime o valor de y(1), com h=0.5, h=0.25 e h=0.1, usando o Método de Euler, de Euler Modificado (Runge-Kutta de 2ª ordem), e de Heun (Runge-Kutta de 2ª ordem).

8 Dado o PVI $y' = -\dfrac{x}{y}$; y(0)=20, determine uma aproximação para y(16). Resolva por Runge-Kutta de 2ª ordem com h=2 e, por Runge-Kutta de 4ª ordem com h=4.

9 Dado o PVI abaixo, considere h=0.2 e 0.1.

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x}(2y + x + 1) \\ y(1) = 0.5 \end{cases}$$

a) Encontre uma aproximação para y(1.6) usando o Método de Euler Modificado, para cada h.

b) Encontre uma aproximação para y(1.6) usando o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem, para cada h.

c) Compare os resultados obtidos com a solução exata, dada por $y(x)=2x^2-x-\frac{1}{2}$.

10 Considere o PVI: $\begin{cases} y' = yx^2 - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

a) Encontre a solução aproximada usando o Método de Euler com h=0.5 e h=0.25, considerando x $\in$ [0,2].

b) Idem, usando Euler Melhorado.

c) Sabendo que a solução analítica do problema é $y(x)=e^{-x+\frac{x^3}{3}}$, coloque num mesmo gráfico a solução analítica e as soluções numéricas encontradas nos itens anteriores. Compare seus resultados.

11 Considere o PVI: $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 + 1}. \\ y(0) = 1 \end{cases}$

a) Calcule aproximações para y(1), usando o Método de Euler com h = 0.2 e h=0.25.

b) Repita o item (a), usando agora o Método de Euler Modificado.

12 Calcule y(0.3) para $y'=-y$; $y(0) = 1$, aplicando o Método de Heun com h = 0.1 (Solução analítica: $y(x)=e^{-x}$).

13 Calcule y(1) para $y'=-y + x + 2$; $y(0) = 2$, aplicando o Método de Runge-Kutta de 2ª ordem com h=0.1 (Solução analítica: $y(x)=e^{-x} + x + 1$).

14 Calcule y(1) para $y'=5x^4$; y(0)=0, aplicando o Método de Euler e Euler Melhorado com h=0.1. Compare os resultados obtidos com a solução exata.