5. Derivada

O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função, o qual está presente no cotidiano das pessoas, através, por exemplo, da determinação da taxa de crescimento de uma certa população, da taxa de crescimento econômico do país, da taxa de redução da mortalidade infantil, da taxa de variação de temperaturas, da velocidade de corpos ou objetos em movimento, enfim, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando e que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento. Para entendermos como isso se dá, inicialmente vejamos a definição matemática da derivada de uma função em um ponto:

***Definição*:** Se uma função f é definida em um intervalo aberto contendo x_0, então a derivada de f em x_0, denotada por $f'(x_0)$, é dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

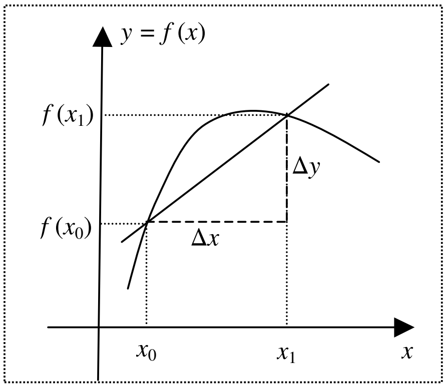
se este limite existir. Δx representa uma pequena variação em x, próximo de x_0, ou seja, tomando $x = x_0 + \Delta x \quad (\Delta x = x - x_0)$, a derivada de f em x_0 pode também se expressa por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Notações: $f'(x_0,)$, $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$, $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Interpretação física: a derivada de uma função f em um ponto x_0 fornece taxa de variação instantânea de f em x_0. Vejamos como isso ocorre:

Suponha que y seja uma função de x, ou seja, $y = f(x)$. Se x variar de um valor x_0 até um valor x_1, representaremos esta variação de x, que também é chamada de incremento de x, por $\Delta x = x_1 - x_0$, e a variação de y é dada por $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$, o que é ilustrado na figura a seguir:



O quociente das diferenças, dado por $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, é dito taxa de variação média de y em relação a x, no intervalo $[x_0, x_1]$. O limite destas taxas médias de variação, quando $\Delta x \to 0$, é chamado de taxa de variação instantânea de y em relação a x, em $x = x_0$. Assim, temos:

Taxa de variação instantânea = $\displaystyle\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Porém, $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Portanto, a taxa de variação instantânea de uma função em um ponto é dada pela sua derivada neste ponto.

Exemplos:

1) Suponha que a posição de uma partícula em movimento sobre uma reta *r* seja dada por $p(t) = t^2 - 6t$, onde $p(t)$ é medida em pés e t em segundos.

a) Determine a velocidade em um instante $t = a$ qualquer.

b) Determine a velocidade da partícula em $t = 0$ e $t = 4$.

c) Determine os intervalos de tempo durante os quais a partícula se move no sentido positivo e negativo sobre r.

d) Em que instante a velocidade é nula?

Solução:

a) A velocidade instantânea é o limite da velocidade média, quando consideramos um intervalo de tempo tendendo a zero, o que é fornecido pela derivada da função posição, no instante desejado. Portanto, temos:

Velocidade média da partícula no intervalo de tempo Δt:

$$V_m = \frac{p(a+\Delta t)-p(a)}{\Delta t} = \frac{[(a+\Delta t)]^2 - 6(a+\Delta t) - (a^2 - 6a)]}{\Delta t}$$

$$= \frac{a^2 + 2a\Delta t\Delta t^2 - 6a - 6\Delta t - a^2 + 6a}{\Delta t^2} = \frac{2a\Delta t + \Delta t^2 - 6\Delta t}{\Delta t} = 2a + \Delta t - 6$$

Velocidade instantânea =

$$V(a) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(a+\Delta t)-p(a)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}(2a + \Delta t - 6) = 2a - 6$$

b) $t = 0 \Rightarrow V(0) = 2.(0) - 6 = -6$ pés/s

$t = 4 \Rightarrow V(4) = 2.(4) - 6 = 2$ pés/s

c) P se move para a direita quando a velocidade é positiva.

P se move para a esquerda quando a velocidade é negativa.

Assim:

$2a - 6 < 0 \iff a < 3$ (velocidade negativa)

$2a - 6 > 0 \iff a > 3$ (velocidade positiva)

Portanto o objeto:

- se movimenta para a esquerda se $t \in (-\infty , 3)$
- se movimenta para a direita se $t \in (3 ,+\infty)$.

d) $V(a) = 0$ quando $2a - 6 = 0$, o que ocorre quando $a = 3$, ou seja, após 3 segundos, a velocidade é nula (o objeto está parado).

2) No decorrer de uma experiência, derrama-se um líquido sobre uma superfície plana de vidro. Se o líquido vertido recobre uma região circular e o raio desta região aumenta uniformemente, qual será a taxa de crescimento da área ocupada pelo líquido, em relação à variação do raio, quando o raio for igual a 5 *cm* ?

Solução:

A taxa de crescimento da área é a sua taxa de variação. Como a área varia com o raio, seja $A(r) = \pi r^2$ a área de um círculo de raio r. A sua taxa de crescimento será portanto, dada por $A'(r)$. Considerando um raio r qualquer, teremos:

$$A'(r) = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{A(r+\Delta r) - A(r)}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\pi\left[r^2 + 2r\Delta r + (\Delta r)^2 - r^2\right]}{\Delta r} =$$

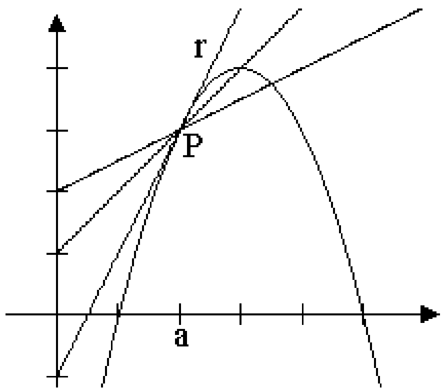
$$= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\pi\left[2r\Delta r + (\Delta r)^2\right]}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \pi\left[2r + \Delta r\right] = 2\pi\, r.$$

Quando $r = 5$, então $A'(5) = 10\pi$, ou seja, a área aumenta 10π cm^2 para cada *cm* de aumento no raio, quando o raio mede 5 *cm*. Em outras palavras, a taxa de crescimento da área é de 10π cm^2/r.

Interpretação Geométrica: a derivada de uma função f em um ponto a fornece o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Vejamos:

Dada uma curva plana que representa o gráfico de f, se conhecermos um ponto $P(a, f(a))$, então a equação da reta tangente r à curva em P é dada por $y - f(a) = m\,(x - a)$, onde m é o coeficiente angular da reta. Portanto, basta que conheçamos o coeficiente angular m da reta e um de seus pontos, para conhecermos a sua equação. Mas como obter m para que r seja tangente à curva em P?

Consideremos um outro ponto arbitrário sobre a curva, Q, cujas coordenadas são $(a + \Delta x, f(a+\Delta x))$. A reta que passa por P e Q que é chamada reta secante à curva.



Analisemos agora a variação do coeficiente angular da reta secante fazendo Q se aproximar de P, ou seja, tomando Δx cada vez menor.

Tudo indica que quando P está próximo de Q, o coeficiente angular m_{sec} da reta secante deve estar próximo do coeficiente angular m da reta r, ou seja, o coeficiente angular m_{sec} tem um limite m quando Q tende para P, que é o coeficiente angular da reta tangente r.

Indicando-se a abscissa do ponto Q por $x = a + \Delta x$ ($\Delta x = x - a$) e sabendo-se que a abscissa de P é expressa por a, então, se Q $\to$ P temos que $\Delta x \to 0$, o que é equivalente a $x \to a$. Assim:

$$m = \lim_{x \to a} m_{PQ} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

(se este limite existe), é o coeficiente angular da reta tangente r. Porém,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Logo, $m = f'(a)$, ou seja, a derivada de uma função em um ponto, de fato, fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico desta função, neste ponto.

Exemplo:

Se $f(x) = x^2$, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto P(2, 4).

Solução:

$$m_{sec} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x \quad (\text{se } \Delta x \neq 0).$$

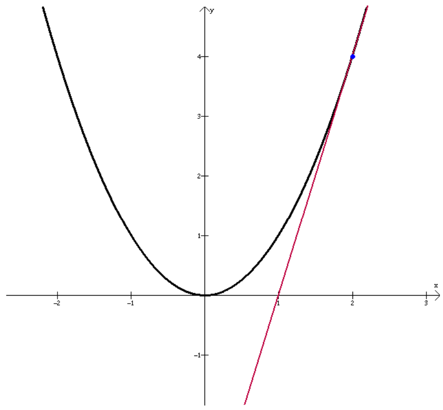
Portanto, coeficiente angular m da reta tangente, quando $x_0 = 2$, é dado por:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4 .$$

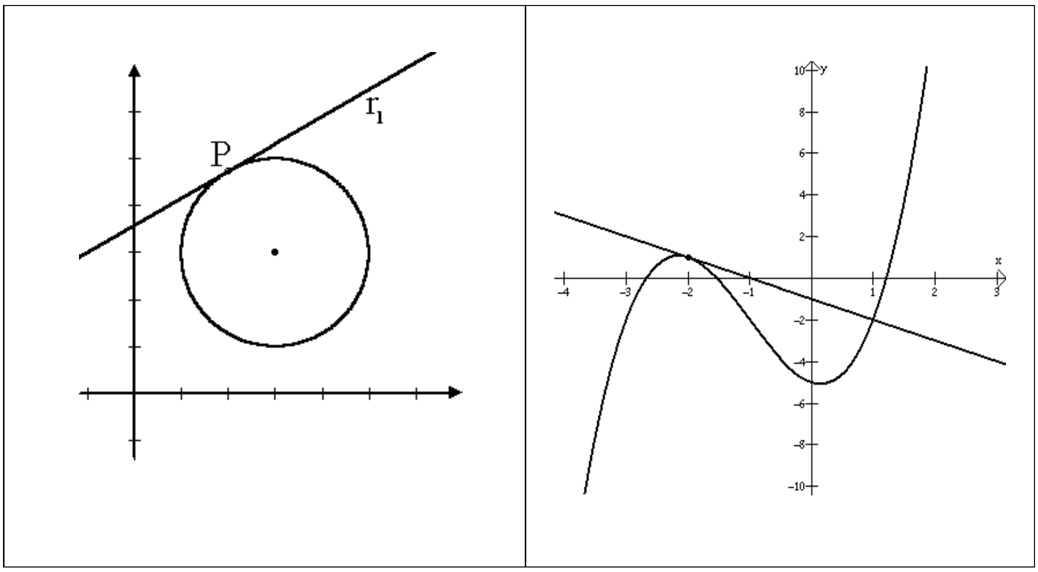
Logo, a equação reduzida para a reta tangente no ponto P(2,4) é dada por:

$$y - 4 = 4(x - 2) \text{ ou } y = 4x - 4,$$

a qual é ilustrada na figura a seguir:



Observação: O conceito que se conhece na geometria plana de reta tangente a uma circunferência, o qual estabelece que a reta tangente toca a circunferência em um único ponto, não pode ser estendido ao conceito de reta tangente a uma curva definida pela função $y = f(x)$. A figura a seguir ilustra essa afirmação.



Exemplos:

1) Dada a função $f(x) = \sqrt{x}$:

a) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f , no ponto P(4,2).

b) Determine a reta normal ao gráfico de f, no ponto P (4,2).

Observação: A reta normal é a reta perpendicular à reta tangente neste ponto e, portanto, seu coeficiente angular satisfaz: $m_n = -1/m_t$.

Solução:

a) A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P é dada por: $y - 2 = f\,'(4)\,(x - 4)$.

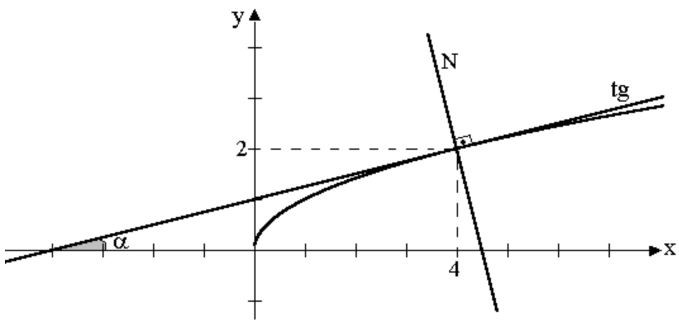
Portanto, basta determinar $f\,'(4)$:

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4+\Delta x} - \sqrt{4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{4+\Delta x} - \sqrt{4}\right)}{\Delta x} \frac{\left(\sqrt{4+\Delta x} + \sqrt{4}\right)}{\left(\sqrt{4+\Delta x} + \sqrt{4}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4+\Delta x - 4}{\Delta x\left(\sqrt{4+\Delta x} + \sqrt{4}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+\Delta x} + \sqrt{4}} = \frac{1}{4}. \qquad (\text{Se } \Delta x \neq 0)$$

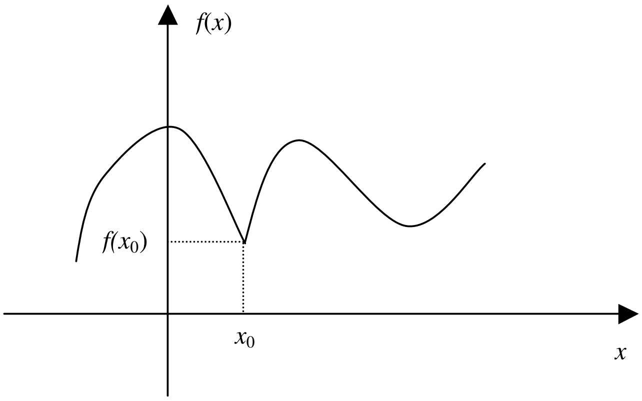
Logo, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P é dada por $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$ ou

$y = \frac{x}{4} + 1$ cujo gráfico é apresentado abaixo:



b) A reta normal, por sua vez, é dada por $y - 2 = -4\,(x - 4)$ ou $y = -4x + 18$.

Observação: Uma conseqüência imediata da interpretação geométrica da derivada é que uma função só é derivável (ou diferenciável) em um ponto de seu domínio se existir uma reta tangente ao seu gráfico por este ponto, ou seja, o gráfico da função neste ponto não apresenta comportamento pontiagudo. Estendendo este raciocínio a todos os pontos do domínio da função, notamos que o gráfico de uma função diferenciável é uma curva suave, sem nenhum pico "pontudo". Assim, a função apresentada na da figura abaixo, por exemplo, **não** é diferenciável em x_0, ou seja, neste ponto não existe a sua derivada, pois por $(x_0, f(x_0))$ não passa uma única reta tangente.



Como podemos notar, o cálculo da derivada através da sua definição nem sempre é simples, pois envolve o cálculo de um limite. Para minimizar este problema, utilizamos algumas propriedades das derivadas, que chamaremos de **regras de derivação**, as quais não serão demonstradas neste texto, porém suas demonstrações decorrem da definição de derivada e podem ser encontradas na maioria dos livros de Cálculo.

Regras de Derivação:

1. Se f é a função constante definida por $f(x) = c$, $c \in \Re$, então $f'(x) = 0$.
2. Se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$.
3. Se $f(x) = x^n$, onde $n \in R^*$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.
4. Se f é diferenciável em x e $g(x) = c\,f(x)$, então $g'(x) = c\,f'(x)$.
5. Se f e g são diferenciáveis em x, então $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.
6. Se f e g são diferenciáveis em x, então $(f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x)$.
7. Se f e g são diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$, então $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.
8. $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$.
9. $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$.
10. $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$; $\quad f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$.
11. $f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$; $\quad f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
12. $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x) \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $f(x) = \text{arc}\cos(x) \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $f(x) = \text{arc tg}(x) \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

15. $f(x) = \text{arc cotg}(x) \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{-1}{1+x^2}$

16. $f(x) = \text{arc sec}(x) \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$.

17. $f(x) = \text{arc cosec}(x) \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$.

18. *Derivada da função composta (Regra da Cadeia):*

Sejam duas funções diferenciáveis f e u, onde $f = f(u)$ e $u = u(x)$, e tal que $y = f(u(x))$. Então, $\dfrac{dy}{dx} = f'(u)\, u'(x)$.

Exemplos:

a) $f(x) = \text{sen}(2x)$.

Seja $u = 2x$. Então $f(u) = \text{sen}(u)$ e $f'(x) = f'(u)\, u'(x) = \cos(u)\, 2$, ou seja, $f'(x) = 2\cos(2x)$.

b) $f(x) = \cos(x^2 + 2x - 1) - 3\text{sen}(x)$.

Seja $u = x^2 + 2x - 1$ e $g(u) = \cos(u)$. Então $g'(x) = \cos'(u)\, u'(x) = -sen(u)\,(2x+2)$.

Assim, $g'(x) = -(2x+2)\, sen(x^2 + 2x - 1)$ e, portanto,

$f'(x) = -(2x+2)\, sen(x^2 + 2x - 1) - 3\cos(x)$.

c) $f(x) = (2x-1)^3$

Seja $u = 2x-1$. Então $f(u) = u^3$ e $f'(x) = f'(u)\, u'(x) = 3u^2\, 2$. Portanto, $f'(x) = 6(2x-1)^2$.

d) $f(x) = (2x+5)(3x-1)$

$f'(x) = 2(3x-1) + (2x+5)\,3$ ou $f'(x) = 12x + 13$.

e) $f(x) = \text{sen}^2 x = (\text{sen}\ x)^2$

Seja $u(x) = \text{sen}\ x$. Então $f(u) = u^2$ e $f'(x) = f'(u)\ u'(x)$, ou seja, $f'(x) = 2\ u\ \cos x$.

Portanto, $f'(x) = 2\ \text{sen}\ x \cos x$.

Obs.: Neste caso também poderíamos ter usado a regra do produto, fazendo:

$f(x) = \text{sen}^2 x = \text{sen}\ x\ \text{sen}x \Longrightarrow f'(x) = \cos x\ \text{sen}\ x + \text{sen}\ x\ \cos x = 2\ \text{sen}\ x\ \cos x.$

f) $f(x) = \sqrt{\cos x} = (\cos x)^{1/2}$

Seja $u(x) = \cos x$. Então $f(u) = u^{1/2}$ $\quad e \quad f'(x) = f'(u)\ u'(x) = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}\ (-senx)$.

Portanto, $f'(x) = \dfrac{-\,senx}{2\sqrt{\cos x}}$.

g) $f(x) = \text{tg}\ x = \dfrac{sen\,x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - sen\,x\,(-sen\,x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\,.$$

h) $f(x) = \log_3(x^2 - 5)$

Seja $u(x) = x^2 - 5$. Então $f(u) = \log_3 u$ e $f'(x) = f'(u)\ u'(x)$, ou seja, $f'(x) = \dfrac{1}{u \ln 3}\ 2x$. Assim,

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2-5)\ln 3}(2x) = \frac{2x}{(x^2-5)\ln 3}\,.$$

i) $f(x) = e^x \ln x$

$$f'(x) = e^x\ \ln x + e^x\ \frac{1}{x} = e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right).$$

EXERCÍCIOS: Calcule a derivada das funções abaixo:

1) $f(x) = 6x^3 - 5x^2 + x + 9$

2) $f(x) = sen^2x \cos^3x$

3) $g(x) = (x^3-7)(2x^2+3)$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$

5) $h(r) = r^2(3r^4-7r+2)$

6) $f(x) = \ln(x^2+x+1)$

7) $f(x) = \sqrt{\cos\sec(x)}$

8) $f(x) = \ln^3x$

9) $g(z) = \dfrac{8-z+3z^2}{2-9z}$

10) $f(x) = \ln(x^3)$

11) $f(t) = t^5 + \left(\dfrac{t+1}{t^2}\right)$

12) $f(x) = (\ln x)(sen\ x)$

13) $s(x) = 2x + \dfrac{1}{2x}$

14) $f(x) = \ln(senx)$

15) $p(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

16) $f(x) = e^{3x^2} + x - 5$

17) $f(x) = \sec^2x$

18) $f(x) = x^3\ 3^x$

19) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

20) $f(x) = sen^3 2x$