Otimização Linear

Prof^a: Adriana
Departamento de Matemática

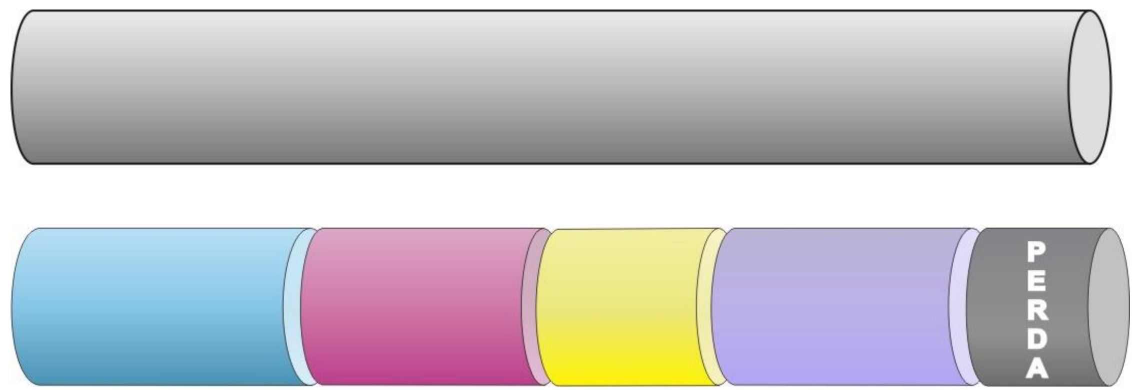
adriana@fc.unesp.br
wwwp.fc.unesp.br/~adriana

Problemas de Corte

- Problema de Corte:
  - Produzir *itens* (peças pequenas), a partir do corte de um *objeto* (peça grande).

OBJETIVOS: minimizar a perda de material dos objetos cortados, minimizar a quantidade de objetos cortados, minimizar o custo de cortar os objetos, maximizar o lucro, entre outros.

Problema de Corte Unidimensional

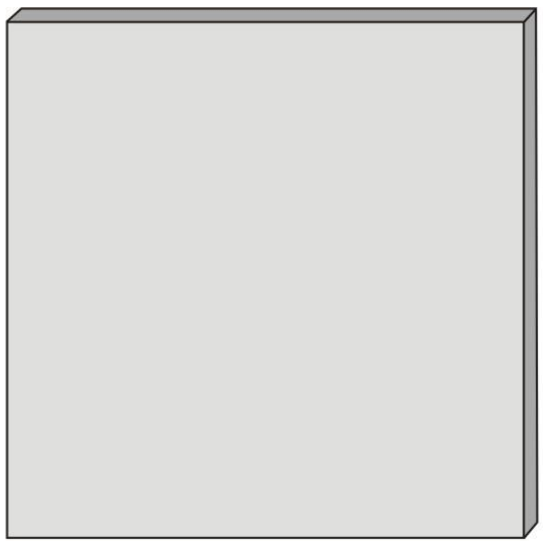


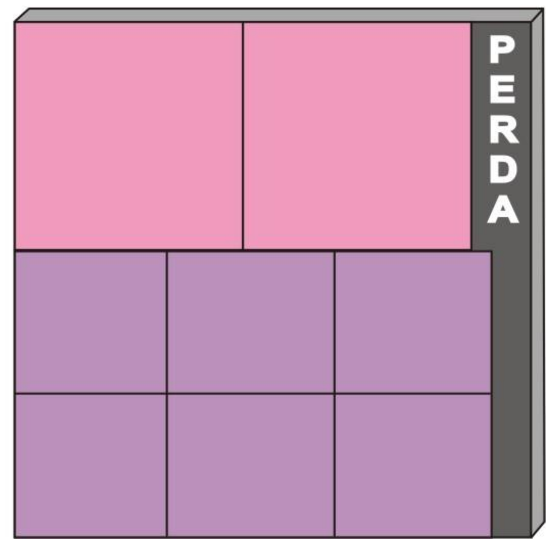
Problema de Corte Unidimensional

Bobina-mestre cortada em sub-bobinas intermediárias e fitas

Problema de Corte Unidimensional

Problema de Corte Bidimensional

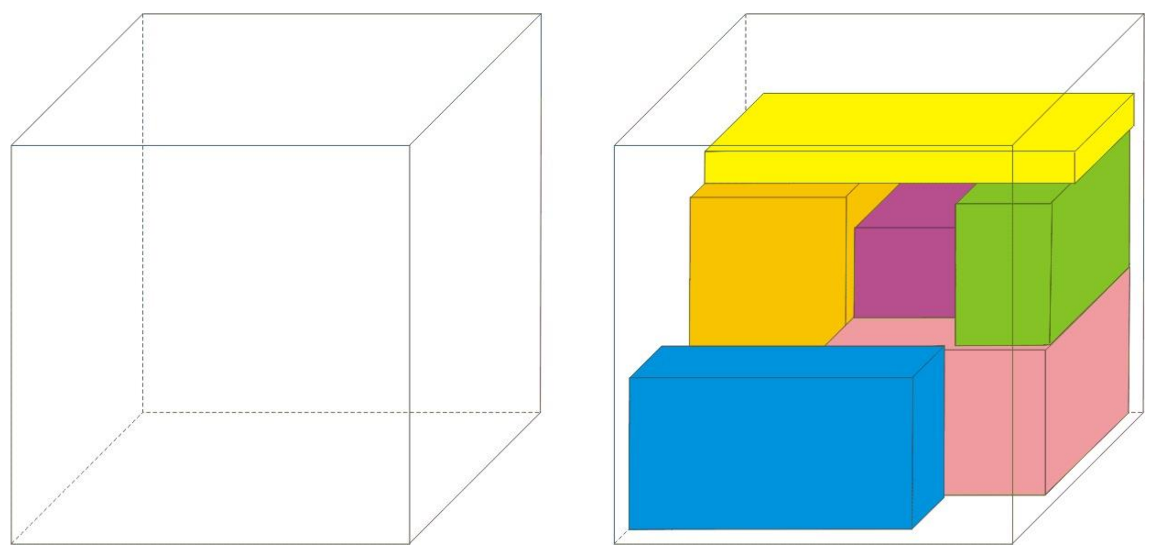




Problema de Corte Bidimensional

Problema de Corte Bidimensional

Problema de Corte Tridimensional



Problema de Empacotamento

- Problema de Empacotamento:
  - Itens devem ser colocados em objetos (por exemplo, contêineres), de modo que o espaço vazio dos objetos seja minimizado.

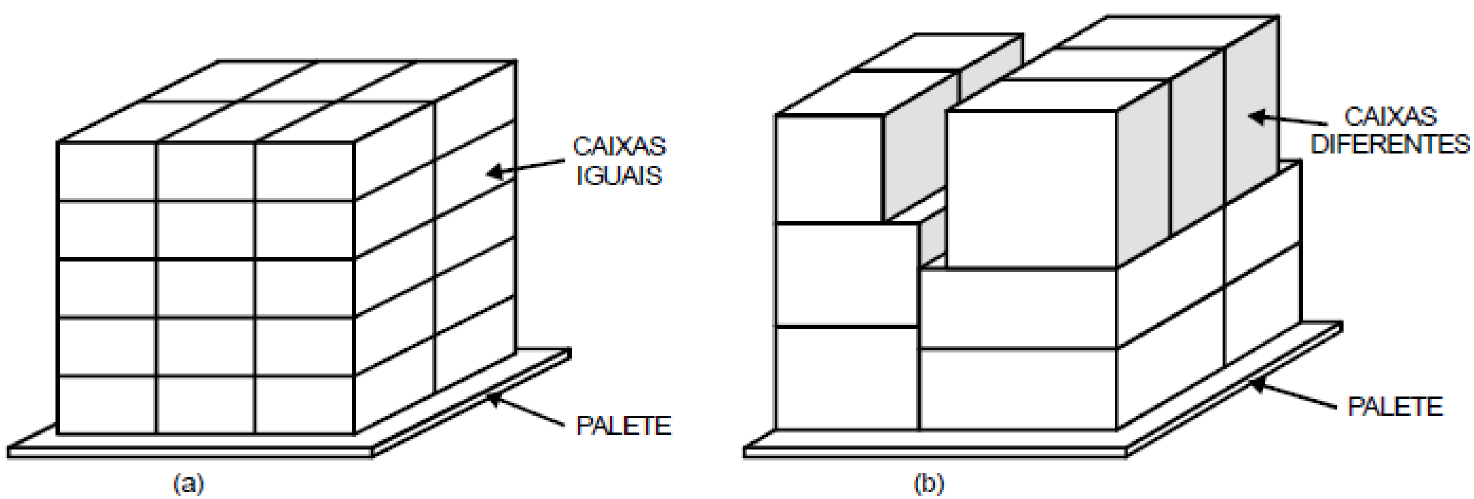
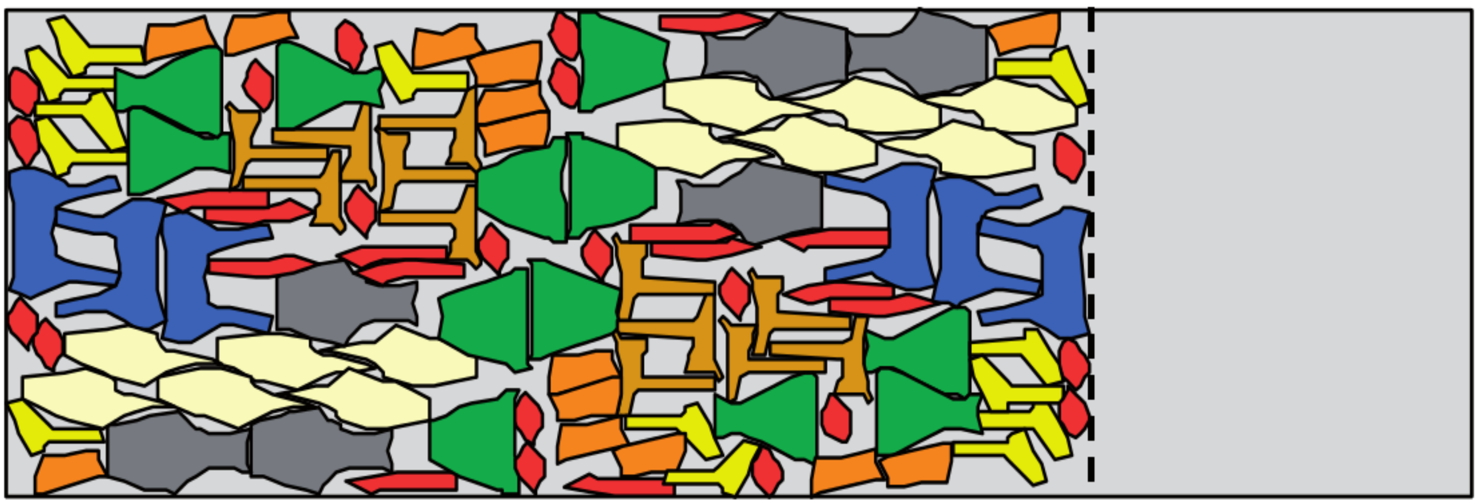


Figura 1 - Padrão de empacotamento para o PCP: (a) do produtor e (b) do distribuidor

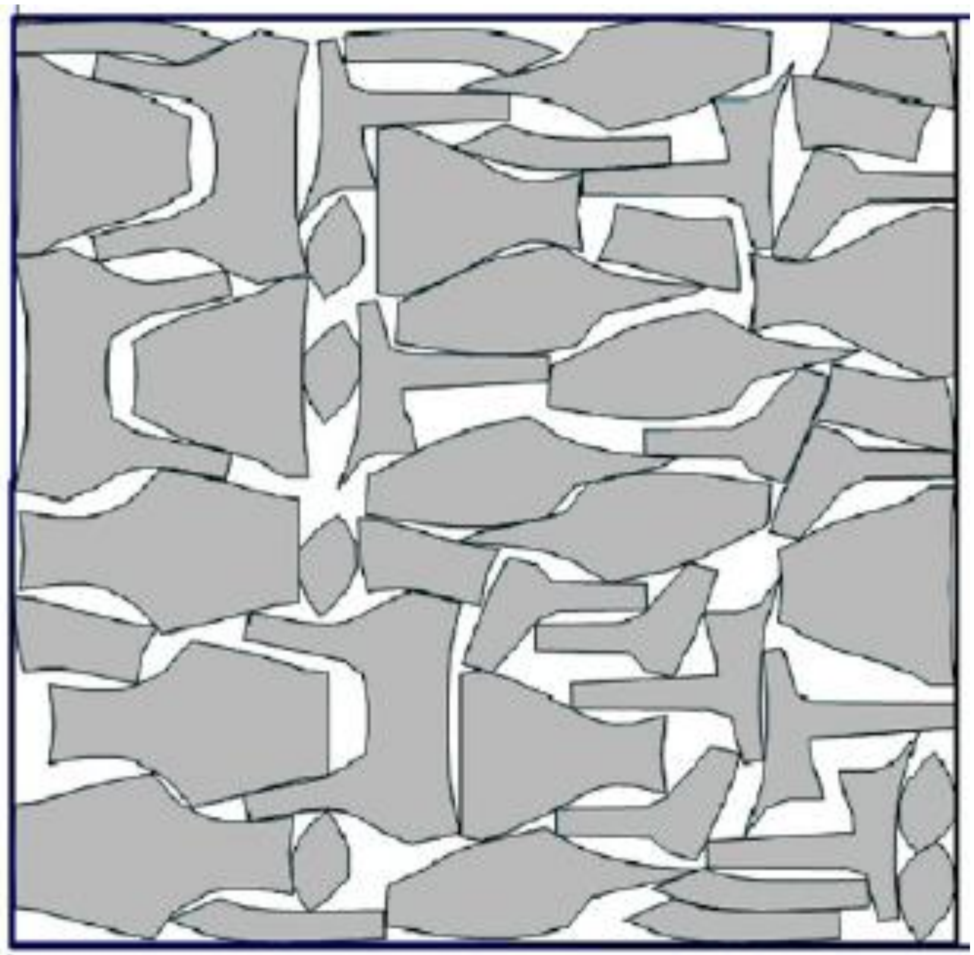
Problema de Empacotamento

Problema de Empacotamento

Strip Packing



Problema de corte irregular



Problema de Corte

- Uma indústria de papel produz bobinas jumbo de L = 400 cm de largura.
- Os jumbos devem ser cortados em bobinas menores (itens) nas larguras e quantidades apresentadas na tabela conforme a solicitação dos diversos clientes:

Dados da demanda	
Comprimento dos itens	Demanda
40 cm	12
45 cm	20
55 cm	42
60 cm	18

Problema de Corte

- Possíveis padrões de corte:
  - Padrão de corte 1: $a_1 = (10\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$
  - Padrão de corte 2: $a_2 = (1\ \ 8\ \ 0\ \ 0)$
  - Padrão de corte 3: $a_3 = (0\ \ 0\ \ 7\ \ 0)$
  - Padrão de corte 4: $a_4 = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 6)$
  - Padrão de corte 5: $a_5 = (0\ \ 4\ \ 4\ \ 0)$
  - Padrão de corte 6: $a_6 = (0\ \ 0\ \ 4\ \ 3)$

Problema de Corte

Problema!!!??

Quantas vezes devemos cortar cada padrão?

Problema de Corte

$$\min f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} x_5 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} x_6 = \begin{bmatrix} 12 \\ 20 \\ 42 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Porque a solução não é ótima?

Solução factível:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 4)$

Função objetivo: 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 4 = 12

Formulação Matemática

Dados:

L : tamanho do objeto;

m : número de tipos de itens;

l_i : comprimento de um tipo de item i;

b_i : quantidade de um determinado tipo de item i;

a_j : vetor associado a um padrão de corte.

$$\boldsymbol{a_j} = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$$

número de peças do tipo 1 no padrão de corte j

Variáveis de decisão:

x_j : número de barras cortadas conforme o padrão de corte j

Formulação Matemática

Como gerar um padrão de corte?!?!

Formulação Matemática

- Um vetor $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$ representa um padrão de corte se e somente se o seguinte sistema é satisfeito:

$$\boxed{\begin{array}{c} l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_m\alpha_m \leq L \\[2em] \alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0,\ \dots,\ \alpha_m \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}}$$

Como escrever a formulação que minimiza o número de barras utilizadas, dado que sabemos todos os padrões de corte possíveis?

Formulação Matemática

- O problema de corte pode ser formulado como:

$$\min\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

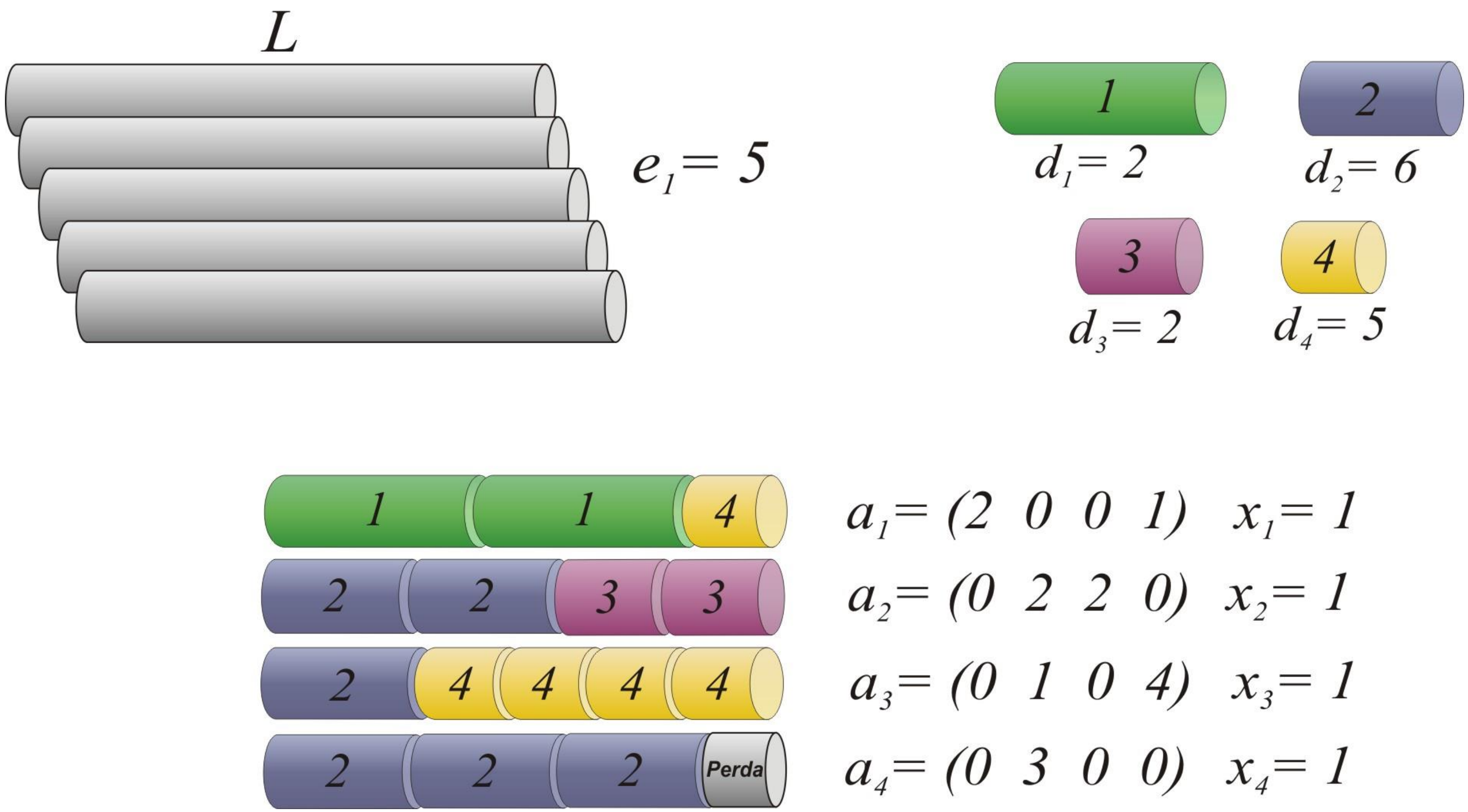
$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Inteiro?

Formulação Matemática

- Exemplo de padrões de corte unidimensionais:



Problemas de Planejamento da Produção

- Planejamento e programação da produção de produtos, os mais variados possíveis
  - Mix de Produção (fabricação de diversos produtos)
  - Seleção de processos (vários produtos com vários processos alternativos)
  - Dimensionamento de lotes (diversos produtos para variados clientes com diferentes datas de entrega)

OBJETIVO: Minimizar os custos de produção dos diferentes produtos em diversas situações (de acordo com cada situação acima)

Problemas de Planejamento da Produção

- Uma fábrica produz 5 modelos de computadores: GP1, GP2, GP3, WS1 e WS2.

Sistema	Preço	#disco	#placas
GP1	$ 6.000	0	4
GP2	$ 4.000	1	2
GP3	$ 3.000	0	2
WS1	$ 3.000	1	2
WS2	$ 1.000	0	1
Disponibilidade máxima		3.000	8.000

✓ Disponibilidade de CPUs: no máximo 7.000 unidades.

Problemas de Planejamento da Produção

- Demandas máximas:
  - 1800 para GP1, 300 para GP3
  - 3800 para toda a família GP
  - 3200 para toda a família WS

- Pedidos já recebidos:
  - 500 GP2
  - 500 WS1, 400 WS2

Objetivo: maximizar o lucro da empresa.

Problemas de Planejamento da Produção

Variáveis:

- ✓ x_1: quantidade de sistemas produzidos do tipo GP1
- ✓ x_2: quantidade de sistemas produzidos do tipo GP2
- ✓ x_3: quantidade de sistemas produzidos do tipo GP3
- ✓ x_4: quantidade de sistemas produzidos do tipo WS1
- ✓ x_5: quantidade de sistemas produzidos do tipo WS2

Problemas de Planejamento da Produção

Sistema	Preço	#disco	#placas
GP1	$ 6.000	0	4
GP2	$ 4.000	1	2
GP3	$ 3.000	0	2
WS1	$ 3.000	1	2
WS2	$ 1.000	0	1
Disponibilidade máxima		3.000	8.000

Disponibilidade de CPUs: no máximo 7.000 unidades.

Objetivo:

maximizar $6.000x_1 + 4.000x_2 + 3.000x_3 + 3.000x_4 + 1.500x_5$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 7000$ (disponibilidade de CPUs)

$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 8000$ (disponibilidade de placas)

$x_2 + x_4 \leq 3000$ (disponibilidade de discos)

Problemas de Planejamento da Produção

Demandas máximas:

1800 para GP1, 300 para GP3

3800 para toda a família GP

3200 para toda a família WS

Pedidos já recebidos:

500 GP2

500 WS1

400 WS2

$x_1 \leq 1800$ (demanda máxima de GP1)

$x_3 \leq 300$ (demanda máxima de GP3)

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3800$ (demanda máxima de GP)

$x_4 + x_5 \leq 3200$ (demanda máxima de WS)

$x_2 \geq 500$ (demanda mínima de GP2)

$x_4 \geq 500$ (demanda mínima de WS1)

$x_5 \geq 400$ (demanda mínima de WS2)

Problemas de Planejamento da Produção

maximizar $6.000x_1 + 4.000x_2 + 3.000x_3 + 3.000x_4 + 1.500x_5$

Sujeito a:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 7000$ (disponibilidade de CPUs)

$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 8000$ (disponibilidade de placas)

$x_2 + x_4 \leq 3000$ (disponibilidade de discos)

$x_1 \leq 1800$ (demanda máxima de GP1)

$x_3 \leq 300$ (demanda máxima de GP3)

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3800$ (demanda máxima de GP)

$x_4 + x_5 \leq 3200$ (demanda máxima de WS)

$x_2 \geq 500$ (demanda mínima de GP2)

$x_4 \geq 500$ (demanda mínima de WS1)

$x_5 \geq 400$ (demanda mínima de WS2)

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Mix de produção (planejamento estocástico)

- O problema consiste em decidir quais produtos e quanto fabricar de cada produto em um período.
- A capacidade limitada de produção (máquinas, recursos humanos, capital, armazenagem, etc) e os diversos produtos que a empresa pode fabricar são conhecidos.
- Determinar quais produtos e quanto deve ser fabricado de cada produto de modo a maximizar o lucro da empresa.

Mix de produção

- Um fabricante de geladeiras precisa decidir quais modelos deve produzir em uma nova fábrica recentemente instalada.

- O departamento de marketing verificou que no próximo mês podem ser vendidas no máximo1.500 unidades do modelo luxo e 6.000 unidades no modelo básico.

- A empresa dispõe de uma força de trabalho de 25.000 homens-hora por mês. Cada modelo de luxo requer 10 homens-hora e cada modelo básico requer 8 homens-hora para ser montado.

- Além disso, uma mesma linha de montagem é compartilhada pelos dois modelos. Considere que a capacidade de produção desta linha seja de 4.500 geladeiras por mês.

Mix de produção

- O lucro unitário do modelo de luxo é de R$ 100,00 e do modelo básico é de R$ 50,00. Deseja-se determinar quanto produzir de cada modelo de modo a maximizar o lucro da empresa.

Variável de decisão

x_j : quantidade de geladeiras do tipo j, j = luxo, básico

Maximizar $f(x_{luxo}, x_{básico}) = 100x_{luxo} + 50x_{básico}$

Sujeito a:

$10x_{luxo} + 8x_{básico} \leq 25.000$

$x_{luxo} + x_{básico} \leq 4.500$

$0 \leq x_{luxo} \leq 1.500$ e $0 \leq x_{básico} \leq 6.000$

Formulação Matemática

Dados:

C_i : capacidade do recurso *i* disponível no período;

a_{ij} : quantidade do recurso *i* utilizado para a produção de uma unidade do produto *j*;

l_j : lucro da empresa para produzir o item *j*;

d_j : produção mínima do produto *j* que deve ser realizada no período;

v_j : produção máxima do produto *j* que deve ser realizada no período;

Variáveis de decisão:

x_j : quantidade de cada produto *j* a ser produzida em um período do planejamento

Formulação Matemática

- Função Objetivo – Maximizar o lucro da empresa

$$F(x) = maximizar\ f(x_1, \ldots, x_n) = l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_nx_n$$

Modelo

Maximizar $\quad z = l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_nx_n$

Sujeito a:

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq C_i \qquad i = 1,\ldots, m$

$d_j \leq x_j \leq v_j \qquad j = 1,\ldots, n$

Um problema clássico

Problema da mochila

- Um viajante dispõe de n itens que deve selecionar para colocar em uma mochila que está sendo preparada para uma viagem.
- O peso do item j é igual a_j e o "lucro" obtido caso ele seja selecionado e colocado na mochila é igual a c_j, para j = 1, …, n.

Quais itens devem ser selecionados, sabendo-se que o peso máximo que o viajante pode carregar na mochila é igual a **b**?

Variáveis de decisão:

x_j: quantidade selecionada do item j

Problema da Mochila

Caso (1): os itens podem ser fracionados e não há limite na quantidade selecionada

Problema de programação linear

$$\text{maximizar} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.a.: \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$

- Solução trivial: selecionar o item j* cuja razão c_j/a_j é máxima e fazer $x_j^* = b/a_j^*$, $x_j = 0$ para os demais.

Problema da Mochila

Caso (2): os itens NÃO podem ser fracionados e não há limite na quantidade selecionada

Problema de programação linear inteira

$$\text{maximizar} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.a.: \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$x_j \geq 0 \text{ e inteiro}, j = 1, \ldots, n$$

Solução não trivial!

- Neste caso, as variáveis inteiras indicam o número de objetos de cada tipo que serão selecionados.

Problema da Mochila

Caso (3): os itens podem ser fracionados e no máximo uma unidade de cada item pode ser selecionada

Problema de programação linear

$$\text{maximizar} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.a.: \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \; j = 1, \ldots, n$$

- Solução trivial: ordenar os itens pela razão c_j/a_j e fazer $x_j = 1$ enquanto couber, fracionar o objeto seguinte e fazer $x_j = 0$ para os demais.

Problema da Mochila

Exemplo

maximizar $6x_1 + 8x_2 + 4x_3 + x_4$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 4$$

$$0 \le x_j \le 1,\ j = 1, 2, 3, 4$$

- Maior razão: $c_1/a_1 = 6/1 = 6 \Rightarrow x_1 = 1$
- Segunda maior razão: $c_2/a_2 = 8/2 = 4 \Rightarrow x_2 = 1$
- Terceira maior razão: $c_3/a_3 = 4/2 = 2 \Rightarrow x_3 = 0,5$
- $x_4 = 0$

Problema da Mochila

Caso (4): os itens NÃO podem ser fracionados e no máximo uma unidade de cada item pode ser selecionada

Problema de programação linear inteira

$$\text{maximizar} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.a.: \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \; j = 1, \ldots, n$$

Solução NÃO trivial!!!!

- As variáveis inteiras (binárias ou 0-1) representam a **decisão** de selecionar um objeto ou não.

Problema da Mochila

Exemplo

$$\text{maximizar } 12x_1 + 7x_2 + 6x_3$$

$$\text{Sujeito a: } 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, 3$$

- Maior razão: $c_1/a_1 = 12/3 = 4 \Rightarrow x_1 = 1$

  $x_2 = x_3 = 0$ e **Lucro = 12**

Esta solução é ótima??

Não, o problema de programação inteira é mais difícil

- Solução ótima: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ e **Lucro = 13**

Problema de Plantio

- Uma cooperativa agrícola opera três fazendas. A produção total de cada fazenda depende da área disponível para o plantio e da água para irrigação.
- A cooperativa procura diversificar sua produção e vai plantar este ano três culturas em cada fazenda: milho, arroz e feijão.
- Cada cultura demanda uma certa quantidade de água.

Problema de Plantio

- São estabelecidos limites de área plantada para cada cultura.
- Para evitar concorrência entre os cooperados, acordou-se que **a proporção de área cultivada seja a mesma para cada fazenda.**
- Determinar a área plantada de cada cultura em cada fazenda de modo a **otimizar o lucro da cooperativa**.

Problema de Plantio

Fazenda	Área (acres)	Água(litros)
1	400	1.800
2	650	2.200
3	350	950

Cultura	Área total máx(acres)	Água (litros por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5.000
Arroz	880	4	4.000
Feijão	400	3,5	1.800